

JUL 22 1926

PERIODICAL ROOM

1 9 2 6

Nr. 11.

# ANNALEN DER PHYSIK

GEGRÜNDET 1799 DURCH F. A. C. GREN  
UND FORTGEFÜHRT DURCH L. W. GILBERT,  
J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN,  
P. DRUDE

VIERTE FOLGE  
BAND 80 HEFT 3  
DER GANZEN REIHE 385. BANDES 3. HEFT

KURATORIUM:  
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT  
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT FÜNF TAFELN



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1926 erscheinen die Bände 79, 80 und 81 à 8 Hefte. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 20.— zuzüglich Rm. —.80 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 1.60 für das Ausland.

Redaktionsschluß am 2. Juni 1926.

# Inhalt.

	Seite
1. B. Pogány. Über die Wiederholung des Harress-Sagnacschen Versuches. (Hierzu Tafel II und III) . . . . .	217
2. Wilhelm Bauer. Das Widerstandsgesetz schnell bewegter Kugeln in Wasser . . . . .	232
3. E. Kleinmann. Über die zeitliche Ausbildung der Oberflächenspannung von Kochsalzlösungen . . . . .	245
4. Helmuth Kulenkampff. Über die Ionisierung von Luft durch Röntgen- und Kathodenstrahlen . . . . .	261
5. Eberhard Buchwald. Gittergeister bei unperiodischen Teilungsfehlern . . . . .	279
6. J. Schrör. Beitrag zur Messung von Röntgennormalen. (Hierzu Tafel IV) . . . . .	297
7. E. Wilhelmy. Zeemaneffekt am Bogen- und Funkenspektrum von Molybdän. (Hierzu Tafel V und VI) . . . . .	305

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Kolberger Straße 16.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.







# ANNALEN DER PHYSIK

## VIERTE FOLGE. BAND 80

### 1. *Über die Wiederholung des Harress-Sagnacschen Versuches; von B. Pogány*

(Vorläufige Mitteilung<sup>1)</sup>)

(Hierzu Tafel II und III)

F. Harress<sup>2)</sup> hat in seiner, im Jahre 1911 erschienenen Dissertation die Ergebnisse seiner Untersuchungen, betreffend die Fortpflanzung des Lichtes in einem rotierenden Glaskörper mitgeteilt. Einen analogen Versuch stellte zwei Jahre später Sagnac<sup>3)</sup> an mit dem Unterschied, daß das Licht sich dabei nicht in Glas, sondern in Luft fortpflanzte. Die von Harress veröffentlichte Theorie des Versuches wurde von P. Harzer<sup>4)</sup> bzw. A. Einstein<sup>5)</sup> berichtigt und die Theorie beider Versuche wurde im Zusammenhange mit derjenigen des Fizeauschen und Zeemanschen Versuches zusammenfassend von M. von Laue<sup>6)</sup> dargestellt. Auf Grund der berichtigten Theorie wurden die Harressschen Ergebnisse von O. Knopf<sup>7)</sup> neu bearbeitet.

Das theoretische Ergebnis ist äußerst einfach. Auf der Peripherie eines in einem mit der Erde verbundenen Koordinatensystem ruhenden, geschlossenen Polygons laufe in einem beliebigen Medium von zwei kohärenten Lichtbündeln das eine in der einen, das andere in der entgegengesetzten Richtung herum. Nachdem beide Bündel diesen geschlossenen Lichtweg einmal durchlaufen haben, werden sie zur Interferenz gebracht. Die so entstehende Lage der Interferenzstreifen in bezug auf ein Fadenkreuz nennen wir die Nullage. Rotiert

1) Ein Bericht hierüber wurde der III. Klasse d. Ung. Akad. vorgelegt.

2) F. Harress, Inaug.-Diss. Jena 1911.

3) G. Sagnac, Journal d. Phys. (5) 4. S. 177. 1914.

4) P. Harzer, Astron. Nachr. 198. S. 377 und 199. S. 10. 1914.

5) A. Einstein, Astron. Nachr. 199. S. 9 u. 47. 1914.

6) M. von Laue, Ann. d. Phys. 62. S. 448. 1920.

7) O. Knopf, Ann. d. Phys. 62. S. 389. 1920.

nun das Polygon um eine Achse, die vom Lichtweg umschlossen wird, mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und bezeichnen wir die Fläche der Projektion des Polygons auf die zur Drehachse senkrechte Ebene mit  $F$ , so verschoben sich während der Rotation die Interferenzstreifen relativ zur Nulllage um den in Streifenbreiten gemessenen Betrag:

$$(1) \quad \Delta = \frac{4 \omega F}{\lambda c}$$

wo  $\lambda$  die im Vakuum gemessene Lichtwellenlänge,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Zu der Formel (1) ist zu bemerken: 1. daß bei ihrer Ableitung der Einfluß von Beschleunigungen vernachlässigt wurde. W. Wien<sup>1)</sup> hat durch eine einfache Überlegung gezeigt, daß man auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie dazu berechtigt ist, 2. daß, wie ersichtlich, die Streifenverschiebung von der Substanz, in welcher sich das Licht fortpflanzt, unabhängig ist.

Bei den messenden Versuchen konnte Harress mit seinem Apparat eine Winkelgeschwindigkeit von etwa 750 Touren pro Minute erreichen; dabei ergab sich etwa  $\Delta = 0,2$ , also verschoben sich die Streifen bei Linksdrehung gegenüber ihrer Lage bei einer Rechtsdrehung um etwa  $2\Delta = 0,4$ . Sagnac arbeitete mit einer maximalen Geschwindigkeit von 120 Touren pro Minute, wobei etwa  $2\Delta = 0,07$  war. Die Beurteilung der Meßgenauigkeit von Sagnac ist schwer, denn es sind bloß die Resultate von 4 Messungen mitgeteilt. Jedenfalls rotierte der Apparat so langsam, daß der Effekt an und für sich klein war. Er benützte das weiße Licht einer kleinen Glühlampe. Die Bestimmung der in die Formel (1) eingehenden Wellenlänge geschah durch Vergleichung der Streifenbreiten des bei ruhendem Apparat mit der Glühlampe und mit einer Hg-Linie gewonnenen Interferenzen. Über die Stabilität seines Apparates äußert sich Sagnac in dem Abschnitt: „Précautions à prendre“ wie folgt: „Cette orientation (der bewegten Interferenzstreifen) diffère de l'orientation relative au repos et on a trouvé utile de dérégler d'avance légèrement, . . ., de façon que les franges soient un peu inclinées dans le sens convenable quand le plateau est au repos. Les franges se redressent quand le

1) M. von Laue, a. a. O. S. 456.

plateau tourne et deviennent verticales pour une fréquence convenable."

Die einzelnen Messungen von Harress bezüglich  $\Delta$  zeigen untereinander Abweichungen von 10 bis 18%. Es wurde deshalb von den Herren M. von Laue und M. Wien eine Wiederholung des Versuches angeregt. Die Mittel dazu wurden teils von der Notgemeinschaft, im wesentlichen aber von der Firma Zeiss bereitgestellt, die Apparate wurden im Zeisswerk in Jena gebaut und der Versuch daselbst ausgeführt.

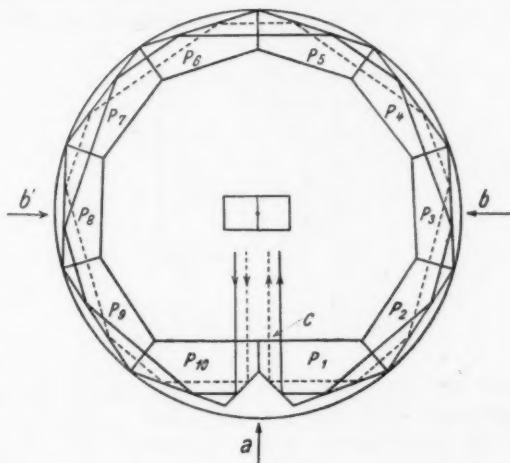


Fig. 1

Um die Gesichtspunkte, die bei der Neukonstruktion des Harress'schen Apparates berücksichtigt wurden, klar hervortreten zu lassen, möchte ich mit einigen Worten auf den ursprünglichen Apparat von Harress eingehen. Der horizontale Grundriß des Apparates ist in Fig. 1 zu sehen. Das Licht lief in den Prismen  $P_1$ — $P_{10}$  herum. Die Einführung des Lichtes und die Trennung in zwei kohärente Bündel geschah im mittleren Prismenkörper, das, in der Richtung der Pfeile  $a$  und  $b$  betrachtet, in Figg. 2a und 2b zu sehen ist. Die Einstellung der Interferenzen, bzw. die Regulierung von deren Breite und Orientierung geschah durch das Justierprisma  $P_1$ ,

das mit Hilfe dreier Schrauben um einen Punkt drehbar war. Das Licht trat während einer Umdrehung bloß in zwei Azimuten des Apparates, in der Richtung der Pfeile  $b$  und  $b'$  horizontal in den Apparat ein. Nachdem die beiden kohärenten Bündel den Weg im Prismenkranz einmal zurückgelegt haben, wurden sie an der halbdurchlässigen Silberschicht im Apparat wieder vereinigt und verließen sodann in Richtung der Drehachse den Apparat, um in die photographische Kamera zu gelangen. Die Öffnung des Apparates war etwa  $\frac{1}{4}$  Grad. Während einer Umdrehung von  $T$  Sek. Dauer fiel also nur während  $\frac{1}{120}$  Sek. Licht durch den Apparat auf die photo-

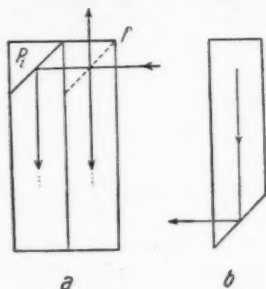


Fig. 2

graphische Kamera. Die Interferenzerscheinung war deshalb so lichtschwach, daß nur mit Bogenlicht gearbeitet werden konnte, das durch farbige Gläser filtriert wurde. Wie schon erwähnt, hat Harress eine Drehgeschwindigkeit von 750 Touren pro Minute erreicht. Bei größeren Geschwindigkeiten wurden die Interferenzen unscharf.

Bei der Sagnacschen Anordnung hat sowohl die Lichtquelle, eine kleine Glühbirne, als auch die Kamera an der Rotation teilgenommen.

Bei der Wiederholung des Harressschen Versuches trachtete ich nun danach, bei unveränderter Interferometerfläche die Drehgeschwindigkeit so weit zu steigern, daß 2  $\Delta$  nahezu 1 werde. Dazu braucht man bei dem Harressschen Apparat etwa 1600 Touren pro Minute. Nun verschwanden aber nach Harress' Beobachtung die Interferenzen oberhalb 750 Touren pro Minute. Dafür konnten zwei Gründe ver-

antwortlich gemacht werden; erstens die bei höheren Tourenzahlen eintretenden Erschütterungen des Apparates, an denen die photographische Kamera nicht teilnahm, und zweitens durch die Zentrifugalkraft bewirkte Verlagerungen der das Licht reflektierenden Prismen. Um diese Gründe auszuschalten, wurde der Vorschlag gemacht, den Apparat mit „fliegender Welle“ zu bauen und das Innere mit einer Flüssigkeit auszufüllen, deren Dichte identisch ist mit derjenigen der Prismen, wodurch die Zentrifugalkräfte ausgeschaltet werden. Die

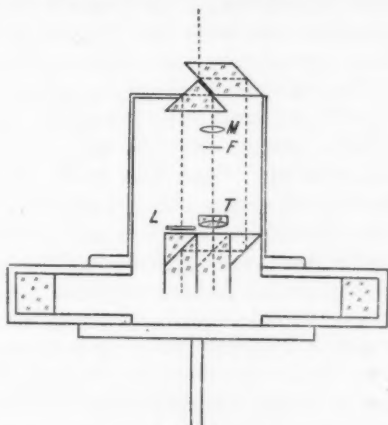


Fig. 3

kritische Tourenzahl der fliegenden Welle muß natürlich weit unterhalb der zu erreichenden Geschwindigkeit von 1600 Touren pro Minute liegen. Gleichzeitig wollte ich monochromatisches Licht anwenden. Da eine Quarz-Hg-Bogenlampe in den Apparat wohl nicht gut eingebaut werden kann, habe ich die Anordnung so gewählt, daß die Lichtquelle ruht und das Licht längs der Drehachse, also dauernd in den Apparat eintritt, die photographische Kamera dagegen, wie bei Sagnac, an der Rotation teilnimmt. Die Interferometeroptik war zunächst identisch mit derjenigen des Harressschen Apparates. Die photographische Kamera wurde oben angebaut (Fig. 3). Das parallele Licht trat längs der punktierten Linie in den Apparat. Die Interferenzen entstanden in der Brennebene  $F$

des Tessars  $T$ . Dasselbst war eine Glasplatte mit eingeritzten Meßmarken angebracht. Die Interferenzen wurden dann samt den Meßmarken durch das Mikroplanar  $M$  (Brennweite 2 cm) auf die photographische Platte  $L$  abgebildet. Wegen der Flüssigkeitsfüllung fiel die totale Reflexion an den Außenflächen der Prismen  $P_1—P_{10}$  (Fig. 1) weg und man mußte deshalb diese Flächen versilbern. Die zur Füllung verwendete Flüssigkeit durfte diese Versilberung und die innere Wand des aus Siemens-Martinstahl bestehenden Apparates, sowie die im Innern befindlichen Aluminiumteile nicht angreifen, mußte durchsichtig sein und die Dichte 3,2 haben. Von chemischer Seite wurde mir eine wäßrige Lösung von Cadmium-Boro-Wolframat empfohlen. Sie erwies sich jedoch als unbrauchbar, denn gleich nach der Einfüllung quoll sie durch das Fülloch wieder heraus. Es entwickelten sich im Apparat scheinbar Gase, die die Flüssigkeit wieder herausdrängten. Die Flüssigkeit mußte daher entfernt werden. Die Prismen wurden nun durch Vermittlung von Gummipfropfen mit kräftigen Schrauben an die Außenwand gepreßt und der Apparat so in Gebrauch genommen. Der Apparat wog etwa 80 kg und wurde auf eine 16 mm dicke, vertikale Achse aufgelegt, welche ungefähr 50 cm über die oberste Führung herausragte. An das untere Ende der Welle war die Turbine befestigt. Der ganze Apparat wurde in einen Betonklotz von etwa 4 Tonnen eingebaut und war im Kellerraum des „Wolkenkratzers“ der Zeisswerke untergebracht. In der obersten Etage befand sich der Wasserbehälter. Der Wasserdruck betrug im Kellerraum etwa  $4\frac{1}{3}$  Atmosphären. Zur Messung der Drehgeschwindigkeit wurde auf einen Chronographenstreifen einerseits jede hundertste Drehung des Apparates, andererseits die Sekundensignale der Sternzeituhr der Zeiss-Sternwarte registriert. Die kritische Tourenzahl des Apparates betrug etwa 600 pro Minute. Mit 1600 Touren pro Minute rotierte der Apparat tadellos, jedoch beim Durchgang durch die kritische Tourenzahl erleidete er derartige Erschütterungen, daß die Optik zugrunde ging. Um das zu vermeiden, versuchte ich, statt der Glasprismen Stahlspiegel einzubauen. Der für Spiegel besonders geeignete Kruppsche Spezialstahl konnte damals nicht beschafft werden. Es wurde also versucht, die Spiegel aus Siemens-Martinstahl her-

zustellen. Leider gelang es nicht, im Format  $4 \times 12$  cm wirklich ebene Spiegel von mindestens 1500 m Brennweite herzustellen. Die Spiegel hatten in verschiedenen Azimuten verschiedene und erheblich kleinere Brennweiten, die Interferenzen waren bei den großen Einfallswinkeln unscharf und verschwommen.

Ich mußte deshalb zu den Glasprismen zurückkehren und den Apparat unten und oben mit einer starren Drehachse versehen. Die obere Achse wurde zwecks Einführung des Lichtes durchbohrt. Gleichzeitig erhielt die photographische Kamera eine flachere Form, indem der Lichtweg vermittelst Prismen um die obere Achse gewickelt wurde. Eine weitere Verbesserung betraf die Justieranordnung des Interferometers. Die Einstellung der Interferenzen geschah bislang durch das Prisma  $P_1$ . Die Fixierung der Lage dieses Prismas mit Hilfe dreier Schrauben schien unsicher zu sein. Das Prisma  $P_1$  wurde deshalb mit dem mittleren Prismenkörper ein für allemal fest zusammengebaut und zur Einstellung der Interferenzen eine andere Anordnung in den Lichtweg eingeschaltet. Diese Anordnung bestand aus zwei kreisförmigen Glaskeilen von 4 cm Durchmesser und  $3^\circ$  Keilwinkel. Die Anordnung wurde bei  $C$  (s. Fig. 1) in den Lichtweg eingeschaltet und so montiert, daß jeder Keil für sich um den Lichtstrahl als Achse drehbar und in beliebiger Lage zu befestigen war. Man konnte also den Keilwinkel von  $0$  bis  $6^\circ$  kontinuierlich verändern und die dickste Stelle des Keiles in ein beliebiges Azimut um den Strahl bringen. Man konnte dadurch Breite und Orientierung der Interferenzen nach Belieben verändern. Da die Strahlrichtung an der Stelle  $C$  der Zentrifugalkraft parallel ist, so erfolgt die Drehbewegung, durch welche die Streifenbreite und die Streifenrichtung eingestellt werden, in einer zur Zentrifugalkraft senkrechten Ebene. Die Zentrifugalkraft kann also im Sinne dieser Drehung kein Drehmoment ausüben. An der Wand der photographischen Kamera wurde ein Loch von etwa 1 cm Durchmesser gebohrt; durch dieses Loch konnte das Licht, das sonst auf die Platte fiel, mittels eines, zwischen dem Tessar und dessen Brennebene angebrachten Prismas aus dem Apparat herausgeführt werden. Waren die Interferenzen parallel der Drehebene orientiert, so konnten sie durch dieses Loch mit einem, auf die Brennebene des Tessars eingestellten Fernrohr

auch während der Rotation betrachtet werden. Wurden die Interferenzen durch dieses Loch visuell betrachtet, so konnte man bei 650—700 Touren pro Minute das Verschwinden der Interferenzen beobachten. Bei derartiger visueller Betrachtung müssen die Interferenzen naturgemäß auch dann verschwinden, wenn sie aus ihrer horizontalen Lage infolge der Verlagerung einer reflektierenden Prismenfläche herausgedreht werden. Aufnahmen, die mit der mitrotierenden Kamera gemacht wurden, zeigten nun, daß dieses anfängliche Verschwinden der Interferenzen tatsächlich darauf beruht, daß die Streifen aus ihrer horizontalen Lage herausgedreht wurden, wobei auch ihre Breite zunahm. Bei noch größeren Geschwindigkeiten, bei 800—850 Touren pro Minute, wurden die Interferenzen auch auf den mitrotierenden Platten unscharf und verschwanden schließlich gänzlich. Es war jedoch bemerkenswert, daß ihre Orientierung und Breite während dieses Unschärfwerdens fast unverändert blieb. Daraus war zu schließen, daß dieses Verschwinden der Interferenzen nicht auf einer Verlagerung einer reflektierenden Prismenfläche beruht. Denn ändert man die Lage einer solchen, oder was auf dasselbe hinauskommt, dreht man den Justierkeil bei *C* und bringt man die Interferenzen dadurch zum Verschwinden, so ändert sich dabei notwendigerweise die Streifenbreite, indem sie 0 oder so groß wird, daß im Gesichtsfeld keine Streifen mehr wahrgenommen werden. Die Bilder der unscharfen Interferenzen sahen genau so aus, wie die Aufnahmen, die ich bei ruhendem Apparat mit den astigmatisch reflektierenden Stahlspiegeln erhielt. Es lag deshalb die Vermutung nahe, daß das schließliche Verschwinden der Interferenzen darauf beruht, daß die Prismen, die trotz sauberster Bearbeitung der Auflageflächen schließlich doch nur auf drei Punkten aufgelegt sind, durch die Zentrifugalkraft durchgebogen werden und also astigmatisch reflektieren. Dazu ist zu bemerken, daß ein Prisma von rund 0,6 kg Gewicht durch die Zentrifugalkraft mit rund 200 kg belastet wurde. Um dieses Durchbiegen der Prismen zu verhüten, wurde der Zwischenraum zwischen den Prismen und ihren Auflageflächen mit einem große Belastung aushaltenden Kitt ausgefüllt. Die Prismenflächen wurden mit Bleigliätte-Glycerinkitt äußerst dünn überstrichen und so an die Außenwand ge-



preßt. Dieser Kitt hat die an ihn geknüpften Hoffnungen erfüllt. Nachdem die Prismen in der oben beschriebenen Weise vermittelt des Kittes befestigt waren, erhielt ich selbst bei 2000 Touren pro Minute tadellos scharfe Interferenzen. Endgültige Messungen wurden jedoch auch mit diesem Apparat noch nicht gemacht, denn die Streifenbreite bei Bewegung unterschied sich von derjenigen bei Ruhe um mehrere Prozent der Streifenbreite.

Es wurde deshalb auf Grund aller bisherigen Erfahrungen der Bau eines dritten Apparates beschlossen. Bei heruntergenommener Deckplatte, von oben betrachtet, ist der Apparat auf Fig. 4 zu sehen. Die Anzahl der reflektierenden Flächen wurde auf ein Minimum reduziert. Es wurden bloß vier Spiegel in Anwendung gebracht und deren Befestigung mit der größten Sorgfalt ausgeführt. Das Licht trat längs der Drehachse, von oben kommend, durch die Öffnung  $O$  in den mittleren Prismenkörper  $P_1$  des Apparates. Auf einer halbdurchlässigen Silberschicht wurde es in zwei kohärente Bündel getrennt, welche, aus  $P_1$  heraustretend, auf das Prisma  $P$  fielen. Von da aus wurde das eine Bündel nach rechts auf den Spiegel  $S_1$ , das andere nach links auf den Spiegel  $S_2$  reflektiert. Die vom Licht im Interferometer umlaufene Fläche war, abgesehen von dem in Abzug zu bringenden Parallelogramm zwischen  $P$  und  $P_1$ , ein Quadrat von etwa 353 mm Seitenlänge, in dessen Ecken die unter  $45^\circ$  reflektierenden Spiegel angebracht waren. Nachdem die zwei kohärenten Bündel das Quadrat einmal umlaufen haben, wurden sie auf der halbdurchlässigen Silberschicht in  $P_1$  wieder vereinigt und zur Interferenz gebracht. Die Interferenzen entstanden in der Brennebene  $F$  des Tessars  $T$ . Dasselbe war eine dünne Glasplatte mit eingeritzten Meßmarken angebracht. Die Interferenzen wurden samt diesen Meßmarken durch das Mikroplanarobjektiv  $M$  (Brennweite 8 mm) auf die photographische Platte der Kamera  $K$  abgebildet. Die zwei Justierkeile sind bei  $J$  angebracht. Die kreisförmigen Glaspiegel sind 14 mm dick und haben einen Durchmesser von 5 cm. Auf ihrer Rückseite in der Mitte war ein Zapfen aufgeschliffen. Die Vorderseite war eben, die Rückseite, vom Zapfen abgesehen, eine Kugelfläche von 26 cm Radius. Die Innenfläche des aus Siemens-Martinstahl hergestellten, massiven

Ringes  $RR$ , mit  $5 \times 6$  cm Querschnitt war ebenfalls eine solche Kugelfläche von 26 cm Radius. An entsprechenden vier Punkten wurden für die Spiegelzapfen vier Bohrungen im Ringe  $RR$  angebracht. Indem die Zapfen in diese Bohrungen versenkt wurden, legten sich die kugeligen Rückflächen der Spiegel vollkommen an die kugelige Innenfläche des Ringes  $RR$  an. Die Spiegel wurden dann justiert, an den Ring zementiert und erhielten schließlich eine Oberflächenversilberung. Da ein Teil des Interferometers, nämlich die vier Spiegel, am Ringe  $RR$  befestigt waren, der andere Teil jedoch, nämlich die halbdurchlässige Silberschicht bzw. das Prisma  $P$ , an der Grund- und Deckplatte des Apparates, so mußte für eine äußerst starre Verbindung des Ringes mit den Platten Sorge getragen werden. Die Versteifung geschah durch 18 Paar eingeschliffene und mit Schrauben anziehbare Konusse. Außer den Konussen waren noch 18 Paar kräftige Schrauben vorhanden. Die hierdurch erzielte Versteifung war derart vollkommen, daß, wenn man nach erfolgter Justierung den Apparat auseinandernahm und wieder zusammenbaute, die Interferenzen sofort, ohne jedes weitere Justieren erschienen. Ziemlich große Mühe bereitete die entsprechende Befestigung der Fassung des Prismas  $P$ . Dieselbe hatte bei 1500 Touren eine Zentrifugalkraft von rund 500 kg auszuhalten. Nach mannigfachen Versuchen kam ich mit sehr kräftigen, eingeschliffenen Konussen zum Ziele.

Die fertig zusammengebaute Anordnung ist in Fig. 5 zu sehen.  $L$  ist die Heraeusche Quarzquecksilberlampe, dessen Licht durch die Linse  $L_1$  auf das Diaphragma  $D$  konzentriert wurde. Der Durchmesser des letzteren betrug 0,5 mm. Hinter  $D$  war ein Lichtfilter aus etwa 1 cm dickem Didymglas und dünnem grünen Glas angebracht, der aus dem Hg-Spektrum nur die grüne Quecksilberlinie durchließ. Das vom Tessar  $T_0$  parallel gemachte Licht wurde vom Pentaprisma  $Pe_1$  senkrecht zur Drehachse nach vorn geworfen. In dem Schnittpunkt der Achse dieses Bündels mit der Drehachse ist das Pentaprisma  $Pe_2$  angebracht, das das Licht längs der Drehachse senkrecht nach unten in den Apparat wirft.  $C$  ist der Tourenzähler, von ihm führt ein Kabel zum Chronographen.  $T_1$  ist die eine,  $T_2$  die andere, in entgegengesetzte Richtung drehende Turbine, welche beide auf der Achse befestigt waren. Einfaches Umschalten

gestattete das Wechseln der Rotationsrichtung.  $V$  ist das Rohr der Wasserleitung.

Mit diesem Apparat wurden im Laufe des Sommers 1925 messende Aufnahmen gemacht. Solche Aufnahmen sind in Originalgröße in Fig. 6 zu sehen. Die Expositionszeit betrug 6 Min. Aufnahme 108 und 109 wurden mit der Rechts- bzw. Linksturbine bei etwa 1200 Touren pro Minute gemacht. Die Aufnahme 86 bezieht sich auf 1500, diejenige auf Fig. 7 auf 2000 Touren pro Minute. Auf den Aufnahmen 108 und 109 bezeichnen die vertikalen Pfeile die Richtung der Verschiebung der Interferenzen. Die links angebrachten kurzen, horizontalen Pfeile weisen also auf beiden Aufnahmen auf denselben Interferenzstreifen.

Da unter sonst gleichen Umständen die zu messende Verschiebung der Streifenbreite proportional ist, ist die Benutzung breiter Interferenzen vorteilhaft, wenn es gelingt, die Lage der breiten Interferenzen mit derselben Genauigkeit festzustellen, wie diejenige der engen Streifen. Zu diesem Zwecke wurde die Schwärzungskurve der breiten Interferenzen photometrisch registriert.<sup>1)</sup> Leider waren die so erhaltenen Kurven, wie Fig. 8 zeigt, gezackt. Diese Zacken rühren von feinen Stauteilchen her, die dauernd aus der Luft auf die Meßmarkenplatte zentrifugiert und mitsamt den Interferenzen auf die photographische Platte abgebildet wurden. Das bewirkte, daß die Genauigkeit dieser Aufnahmen nicht einmal diejenige der engen Interferenzen erreichte. Ich beabsichtige deshalb, diese Aufnahmen im kommenden Sommer mit Spinnfäden als Meßmarken zu wiederholen. Daß die Spinnfäden die Rotation aushalten — es handelt sich nur um etwa 1 mm lange Stücke — davon habe ich mich schon durch Versuche überzeugt.

Nach Anbringung von verschiedenen kleineren Verbesserungen wurden die Aufnahmen gemacht, deren Ergebnisse in den folgenden Tabellen mitgeteilt werden. Die Aufnahmen 82 bis 98 wurden direkt mit Komparator, die Aufnahmen 117 bis 128 auf Grund der Schwärzungskurven nach der Methode G. Hansens ausgemessen.

---

1) Für die Registrierung bin ich Hrn. G. Hansen zu Dank verpflichtet.

Tabelle 1.

Platten- nummer	$T_{\text{sec}}$	$\bar{T}_{\text{sec}}$	$b_{\text{mm}}$	$\bar{b}_{\text{mm}}$	$X_0$	$\frac{X_{01} - X_{02}}{\bar{b}} = \bar{A}_{\bar{T}}$	$A$	$A - A_m$
82	0,04002	0,03994	1,304	1,306	- 0,010	1,198 = 0,917	0,916	- 0,001
83	0,03987		1,309		- 1,208	1,306		
84	0,03994	0,04001	1,316	1,310	- 0,033	1,189 = 0,908	0,908	- 0,009
85	0,04009		1,305		- 1,222	1,310		
85	0,04009	0,03990	1,305	1,309	- 1,222	1,198 = 0,915	0,913	- 0,004
86	0,03971		1,313		- 0,024	1,309		
86	0,03971	0,03969	1,313	1,312	- 0,024	1,192 = 0,908	0,901	- 0,016
87	0,03968		1,311		- 1,216	1,312		
87	0,03968	0,03989	1,311	1,316	- 1,216	1,199 = 0,911	0,908	- 0,009
88	0,04011		1,321		- 0,017	1,316		
88	0,04011	0,04002	1,321	1,320	- 0,017	1,211 = 0,917	0,917	-
89	0,03993		1,319		- 1,228	1,320		
89	0,03993	0,04002	1,319	1,320	- 1,228	1,240 = 0,939	0,939	+ 0,022
90	0,04011		1,322		+ 0,012	1,320		
90	0,04011	0,04014	1,322	1,322	+ 0,012	1,227 = 0,928	0,931	+ 0,014
91	0,04017		1,323		- 1,215	1,322		
93	0,03986	0,03973	1,327	1,334	- 1,183	1,224 = 0,917	0,911	- 0,006
94	0,03961		1,341		+ 0,041	1,334		
95	0,03976	0,03998	1,268	1,274	- 1,179	1,192 = 0,935	0,935	+ 0,018
96	0,04021		1,279		+ 0,013	1,274		
96	0,04021	0,03900	1,279	1,276	+ 0,013	1,175 = 0,921	0,898	- 0,019
97	0,03780		1,273		- 1,162	1,276		
97	0,03780	0,03903	1,273	1,274	- 1,162	1,204 = 0,945	0,922	+ 0,005
98	0,04026		1,275		+ 0,042	1,274		

Mittel = 0,917 =  $A_m$

Tabelle 2

Platten- nummer	$T_{\text{sec}}$	$\bar{T}_{\text{sec}}$	$b_{\text{mm}}$	$\bar{b}_{\text{mm}}$	$X_0$	$\frac{X_{01} - X_{02}}{\bar{b}} = \Delta \bar{T}$	$\Delta$	$\Delta - \Delta_m$
117	0,03993	0,04003	28,245	28,369	- 79,535	$\frac{26,193}{28,369} = 0,923$	0,924	—
118	0,04013		28,494		- 53,342			
118	0,04013	0,04006	28,494	28,520	- 53,342	$\frac{26,541}{28,520} = 0,928$	0,929	+ 0,005
119	0,03998		28,545		- 79,883			
119	0,03998		28,545		- 79,883			
120	0,04002	0,04000	28,603	28,574	- 58,978	$\frac{25,905}{28,574} = 0,907$	0,907	- 0,017
122	0,04003		28,083		- 52,706			
123	0,03994	0,03999	27,933	28,008	- 78,099	$\frac{25,393}{28,008} = 0,905$	0,905	- 0,019
123	0,03994		27,933		- 78,099			
124	0,04007	0,04001	28,163	28,048	- 51,986	$\frac{26,113}{28,048} = 0,931$	0,931	+ 0,007
124	0,04007		28,163		- 51,986			
125	0,03986	0,03997	28,249	28,206	- 77,319	$\frac{25,393}{28,206} = 0,898$	0,897	- 0,027
125	0,03986		28,249		- 77,319			
126	0,03992	0,03989	28,259	28,254	- 51,162	$\frac{26,157}{28,254} = 0,926$	0,923	- 0,001
126	0,03992		28,259		- 51,162			
127	0,04013	0,04003	28,436	28,348	- 77,876	$\frac{26,714}{28,348} = 0,942$	0,943	+ 0,019
127	0,04013		28,436		- 77,876			
128	0,04036	0,04025	28,215	28,326	- 50,912	$\frac{26,964}{28,326} = 0,952$	0,958	+ 0,034
128	0,04036		28,215		- 50,912			
Mittel = 0,924 = $\Delta_m$								

1,274 = 0,943  
+ 0,042  
+ 0,005

1,275  
+ 0,042

1,275  
+ 0,042

0,04026  
+ 0,042

0,04026  
+ 0,042

Bei der Ausmessung mit dem Komparator wurde auf jeden Streifen wie auch auf die Meßmarke 10mal eingestellt. Man erhält dann die Lage  $X_k$  des  $k$ -ten Streifens in bezug auf die Meßmarke. Indem man die Lage  $X_0$  des 0-ten Streifens, sowie die Streifenbreite  $b$  einführt, erhält man Gleichungen von der Form

$$X_k = X_0 + k b$$

in welcher  $X_0$  und  $b$  Unbekannte sind. Sie wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Die Resultate sind in den zwei Tabellen zusammengestellt.

$T$  ist die Umdrehungszeit in Sternzeitsekunden,  $b$  die Streifenbreite in Millimeter.  $\bar{T}$  und  $\bar{b}$  sind die Mittelwerte für zwei miteinander kombinierte Aufnahmen entgegengesetzter Rotation. Wo zwei aufeinanderfolgende Aufnahmen nicht kombiniert wurden, bedeutet das, daß zwischen den beiden Aufnahmen entweder die Einstellung des Fadenkreuzes, oder die Orientierung, oder die Breite der Interferenzen korrigiert wurde. Der aus den Messungen sich ergebende Wert  $\Delta_{\bar{T}}$  gehört zur Umdrehungszeit  $\bar{T}$ ,

$$\Delta = \Delta_{\bar{T}} \frac{\bar{T}}{0,04}$$

gehört zur Umdrehungszeit  $T = 0,04$  Sternzeitsekunden.  $\Delta_m$  ist der Mittelwert der beobachteten  $\Delta$ .  $\Delta_m$  gehört also zur Umdrehungszeit  $T = 0,04$  Sternzeitsekunden, oder  $T = 0,03989$  Sek. mittlere Zeit. Bei den engen Interferenzen ist  $\Delta - \Delta_m$  durchweg kleiner als 2 Proz., bei den breiten übertrifft sie an einer Stelle 3 Proz.

In den Tabellen bedeutet  $\Delta$  das Zweifache der durch Formel (1) gegebenen Verschiebung, da immer zwei Aufnahmen entgegengesetzter Rotation kombiniert wurden. Den der Tabelle entsprechenden theoretischen Wert für  $\Delta$  erhält man also aus

$$\Delta = \frac{8 \omega F}{\lambda c}$$

Die vom Licht umlaufene Fläche ist für den Mittelstrahl

$$F = 1178 \text{ cm}^2$$

die zu  $T = 0,03989$  Sek. gehörige Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 157,43 \frac{1}{\text{sec}}$$

substituiert man noch

$$\lambda = 546 \times 10^{-7} \text{ cm}$$

und  $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/sec}$ , so erhält man

$$\Delta = 0,906$$

Die beobachteten Mittelwerte sind um 1,2 Proz. bzw. um nicht ganz 2 Proz. größer. Nach einer brieflichen Bemerkung Hrn. v. Laues, der ich durchaus beistimme, erscheint die Abweichung zwischen der berechneten und beobachteten (mittleren) Streifenverschiebung für die gute Übereinstimmung zwischen den Einzelbeobachtungen etwas groß.

Die Untersuchung ist noch nicht abgeschlossen. Außer mit der grünen Hg-Linie sollen noch Aufnahmen mit anderen Wellenlängen gemacht werden. Außerdem will ich zwischen den Spiegeln  $S_1$  und  $S_2$  bzw.  $S_3$  und  $S_4$  je eine Flüssigkeitskammer einschalten, wodurch die Größe der Verschiebung nicht beeinflusst werden darf.

Der Notgemeinschaft und vor allem den Herren der Firma Zeiss, die die Ausführung der Untersuchung im Zeisswerk ermöglichten und in der zuvorkommendsten Weise förderten, besonders den Herren Dr. W. Bauersfeld und Prof. Straubel von der Geschäftsleitung und den Herren Ob.-Ing. Meyer, Ing. Büchele und Köppen vom Konstruktionsbureau möchte ich meinen aufrichtigsten Dank aussprechen.

Besonderen Dank schulde ich Hrn. Geheimrat M. Wien für das äußerst liebenswürdige, fördernde Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte und meiner vorgesetzten Behörde, dem kön. Ung. Unterrichtsministerium, das mir die Ausführung der Arbeit in Jena in dankenswerter Weise ermöglichte.

(Eingegangen 28. März 1926)

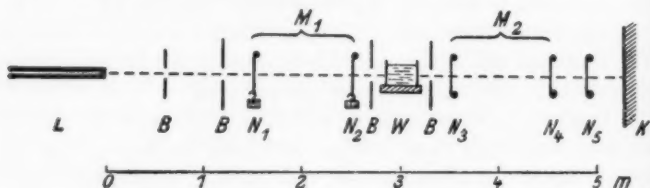
---

## 2. Das Widerstandsgesetz schnell bewegter Kugeln in Wasser; von Wilhelm Bauer

Im folgenden sollen die Ergebnisse einiger Versuche mitgeteilt werden, die zur Aufstellung eines genauen Widerstandsgesetzes von Kugeln hoher Geschwindigkeit in Wasser ausgeführt wurden.

### Allgemeine Versuchsanordnung

Aus einem festmontierten Gewehrlauf wurden mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten Geschosse wagerecht durch einen Wasserbehälter hindurch geschossen und der Geschwindigkeitsverlust, den die Geschosse hierbei erlitten, mittels einer elektrischen Meßvorrichtung festgestellt. Fig. 1 zeigt eine Skizze dieser Versuchsanordnung.



$L$  = Gewehrlauf

$B$  = Blenden zum Schutz der Meßstrecken gegen Pulvergase und Wasserspritzer

$M_1$  und  $M_2$  = 1. und 2. Meßstrecke

$N_1$  bis  $N_4$  = Gitter der beiden Meßstrecken

$N_5$  = Gitter für die automatische Schalterauslösung

$W$  = Wasserbehälter

$K$  = Kugelfang

Fig. 1

Der Wasserbehälter besaß zwei leicht auswechselbare Papierwände aus 0,03 mm starkem Lackpapier, die dem Geschosß beim Ein- und Austritt wenig Widerstand boten. Die Entfernung der beiden Wände voneinander ließ sich verändern,



so daß damit die Länge des Wasserweges beliebig variiert werden konnte. Das Geschoß ging 6 cm über dem Boden bzw. 7 cm unter der Wasseroberfläche durch den 18 cm breiten Behälter hindurch.

Um mechanisch möglichst einfache Versuchsbedingungen zu gewinnen, besaß der Gewehrlauf keine Züge, so daß dem Geschoß keine Rotation erteilt wurde. Eine Deformation des Geschosses wurde durch Verwendung von Stahlkugeln aus Kugellagern (11,003 mm Durchmesser, 5,42 g Gewicht) vermieden. Da die Oberfläche der Geschosse beim Auffangen leicht Schrammen erhielt, wurde für jeden Schuß eine neue Kugel verwendet, um stets unveränderte Reibungsgrößen zwischen Kugeloberfläche und Flüssigkeit zu behalten.

Verschiedene Geschwindigkeiten konnten durch verschieden große Pulvermengen erzielt werden; die Maximalgeschwindigkeit betrug 650 m/sec, während die untere Grenze der Geschwindigkeit bei 150 m/sec durch die Meßvorrichtung bedingt wurde.

#### Apparatur für die Geschwindigkeitsmessung

Zur Messung der Geschößgeschwindigkeit wurde die Methode der Kondensatorentladung<sup>1)</sup> angewendet, die es in bequemer Weise gestattet, den Anfangs- und Endpunkt eines kleinen Zeitintervalls beide Male durch Öffnen eines Stromkreises, in diesem Falle also vermittelt Durchschießens eines Drahtgitters zu markieren. Ein Schaltschema dieser Methode zeigt Fig. 2.

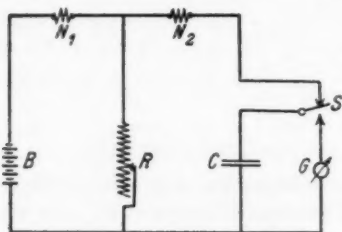
Das Prinzip der Methode ist folgendes: Sind die Gitter  $N_1$  und  $N_2$  intakt, so hält die Batterie die Enden des Widerstandes  $R$  unter Spannung und lädt über  $N_2$  den Kondensator (Kapazität  $C$ ) mit einer Elektrizitätsmenge  $q_0$  auf. Zerreißt nun die Kugel im Zeitpunkt  $t_1$  das erste Gitter  $N_1$ , so wird die Batterie von dem Widerstand getrennt, und der Kondensator kann sich durch  $R$  entladen. Die Entladung hält so lange an, bis die Kugel im Zeitpunkt  $t_2$  auch das zweite Gitter der Meßstrecke durchschlägt und den Entladungskreis unter-

1) Allgemeine Darstellung: C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Bd. 3. Vgl. auch: P. E. Klopsteg, Measurements of time intervals. Phys. Rev. [2] 15. S. 12. 1920.

bricht. Durch Umlegen des Schalters  $S$  wird jetzt die Restladung  $q_r$  des Kondensators mit dem ballistischen Galvanometer  $G$  gemessen. Aus den bekannten obigen Daten ( $q_0$  wird vor dem Schuß bestimmt) läßt sich dann die Zeit, die das Geschloß gebraucht hat, um die Meßstrecke zu durchfliegen, bestimmen zu

$$t_2 - t_1 = CR \cdot \ln \frac{q_0}{q_r}$$

Da für die hier beschriebenen Versuche die Geschwindigkeit des Geschosses vor und hinter dem Wasserbehälter bestimmt werden mußte, so war die gesamte Meßapparatur verdoppelt bis auf die Batterie, die beide Meßkreise gemeinsam speiste. Änderungen der Ladespannung des Kondensators im



- $B$  = Akkumulatorenbatterie  
 12 Volt  
 $C$  = Kondensator  $\frac{1}{2}$  Mfd.  
 $R$  = Induktionsfreier Widerstand 1000—20000  $\Omega$   
 $G$  = Ballistisches Drehspulinstrument  
 $S$  = Schalter, der es gestattet, den Kondensator durch das Galvanometer zu entladen  
 $N_1$  und  $N_2$  = Drahtgitter der Meßstrecke

Fig. 2

2. Meßkreis, die dadurch auftraten, daß der 1. Meßkreis beim Schuß plötzlich von der Batterie getrennt wurde, konnten durch einen parallel zur Batterie geschalteten 200- $\Omega$ -Widerstand vermieden werden. Es ließ sich so eine ausgezeichnete Konstanz der Spannung erzielen.

Für die Drahtgitter der ersten Meßstrecke wurde mit Erfolg je ein U-förmig gebogenes glashartes Stahldrähtchen (0,2 mm Durchmesser) benutzt, durch ein angehängtes Gewicht in senkrechter Stellung gehalten. Diese Drähte bieten den Vorteil, daß sie sofort bei Berührung mit dem Geschloß zerspringen, während gespannte Kupferdrähte sich vor dem Zerreißen etwas recken und bei zu kleinen Geschwindigkeiten die Kugel durchschlüpfen lassen. Bei der zweiten Meßstrecke mußten trotzdem der stärkeren Streuung wegen, die in größerer Entfernung vom Gewehr und hinter der Wassermasse auftrat,

breitere Gitter aus gespannten lackierten Kupferdrähten (0,2 mm Durchmesser) verwendet werden. Die Stahldrähtchen ließen sich in größerer Zahl nicht nebeneinander anbringen, da beim Durchschießen die freien Enden in starke Schwingung gerieten und mit den Nachbardrähten zusammenschlugen. Infolge des Durchschlüpfens der Kugel durch die Kupferdrähte war eine untere Grenze der Geschößgeschwindigkeit gegeben.

#### Beseitigung von Fehlerquellen und Genauigkeit der Messung

Die Apparatur befand sich in einem vom Schießraum entfernten Zimmer, so daß die Galvanometer durch Luftdruck und Erschütterung beim Abschuß nicht gestört wurden. Beide Galvanometer waren wiederum in einiger Entfernung voneinander aufgestellt, damit sich die Magnetfelder nicht gegenseitig beeinflussten; außerdem wurden sie dauernd durch Eichmessungen kontrolliert.

Zur Isolation der Apparatur wurden nur Bernstein, Picein oder Hartgummi benutzt, wobei sich letzterer als am wenigsten zuverlässig erwies. Die Kondensatoren, deren Kontaktklemmen auf Hartgummi angebracht waren, mußten in einen Exsiccator eingeschlossen werden. Außerdem war die elektrische Apparatur samt Gitter zum Schutz gegen vagabundierende Ströme auf geerdete Zinkplatten gestellt.

Größere Schwierigkeit bot die Beseitigung des Fehlers, der durch Rückstände selbst bei Verwendung von Glimmerkondensatoren bewirkt wurde. Bei der ballistischen Messung der Kondensatorladung konnte er durch Zeitschalter eliminiert werden, die nach dem Prinzip von A. Zeleny<sup>1)</sup> gebaut waren. Dagegen bewirkten die Rückstände eine Erhöhung von  $q_r$ , die auch dadurch nicht vermieden werden konnte, daß die Zelenyschalter durch automatische Auslösung mittels des Gitters  $N_6$  am Ende der Schußbahn (vgl. Fig. 1) 0,1 sec nach dem Schuß die Restladung zu messen gestatteten. Immerhin konnte der entstehende Fehler, wie ein Vergleich mit einem Helmholtzpendel zeigte, unter  $\frac{1}{2}$  Proz. gehalten werden, wenn die Restladung nicht zu klein (etwa  $\frac{2}{3}$  der Vollladung  $q_0$ ) gewählt wurde.

1) A. Zeleny, Phys. Rev. 22. S. 65. 1906.

Schließlich zeigten noch die beiden Meßkreise gegeneinander Abweichungen von 1 bis  $\frac{1}{2}$  Proz., deren Ursache nicht gefunden wurde. Der Fehler war jedoch leicht auszugleichen, indem das Mittel aus je zwei Messungen genommen wurde, bei denen einmal der 1. Meßkreis mit der 1. Meßstrecke und der 2. Meßkreis mit der 2. Meßstrecke, ein zweites Mal der 1. Meßkreis mit Meßstrecke 2 und der 2. Meßkreis mit Meßstrecke 1 verbunden waren.

Unter diesen Bedingungen ergab sich der mittlere Fehler der einzelnen Geschwindigkeitsmessungen relativ zueinander zu 1 Proz., während der mittlere Fehler des Absolutwertes so, wie er sich aus Unsicherheiten in der Meßstrecke, in der absoluten Kapazität der Kondensatoren und sonstiger kleiner Einflüsse ergab, zu 2,5 Proz. angenommen werden muß.

#### Resultate der Messungen

Um nur den Widerstand des Wasserweges zu erhalten, mußte noch der Geschwindigkeitsverlust der Kugel auf dem 2 m langen Luftweg zwischen den beiden Meßstrecken, sowie der Verlust beim Durchschlagen der Papierwände des Wasserbehälters und der Drähte der Gitter in Rechnung gestellt werden. Die beiden letztgenannten Gegenstände leisteten dem Geschoß so wenig Widerstand, daß der Geschwindigkeitsverlust unterhalb der Fehlergrenze lag, während der Luftwiderstand bei 200 m/sec Geschwindigkeit einen Verlust von 0,8 Proz. Geschwindigkeit und bei 600 m/sec einen Verlust von 2,3 Proz. bewirkt. Diese Werte stimmen bis auf Abweichungen von  $\frac{1}{2}$  Proz. gut mit dem Luftwiderstandsgesetz überein, das Hélie<sup>1)</sup> für Kugeln ermittelt hat.

Es wurde nun bei konstanter Länge des Wasserweges die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschoßgeschwindigkeit untersucht. Dabei wurde anfänglich die Wasserstrecke nur kurz (etwa 1 cm und 3 cm lang) gewählt, um ohne allzu große Fehler eine mittlere Geschwindigkeit für das Durchfliegen des Wasserweges ansetzen zu können. Als sich dann aus den Vorversuchen ergeben hatte, daß der Widerstandskoeffizient unabhängig von der Geschwindigkeit ist, und dadurch

1) C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik. Bd. 1. S. 53. 1917.

die Beschränkung auf kurze Meßstrecken fortfallen konnte, wurde zunächst noch eine Meßreihe mit einem Wasserweg von 8 cm Länge hinzugefügt. Die Werte dieser drei Meßreihen einschließlich Korrektion infolge des Luftwiderstandes gibt Tab. 1 wieder. Es bedeuten:

$s$  = Länge des Wasserweges in cm (die an sich unbeabsichtigten Schwankungen von  $s$  erklären sich durch die Ausbauchungen der Papierwände im Wasserbehälter),

$v_a$  = Anfangsgeschwindigkeit in m/sec,

$v_e$  = Endgeschwindigkeit in m/sec.

Tabelle 1

I			II			III		
$s$	$v_a$	$v_e$	$s$	$v_a$	$v_e$	$s$	$v_a$	$v_e$
1,05	140	128	3,00	167	149	8,35	211	163
1,20	184	174	3,00	180	162	8,10	218	171
1,25	184	174	3,00	181	165	8,15	228	175
1,10	240	223	2,90	216	197	8,20	243	183
1,10	292	279	3,05	226	204	8,05	283	226
1,05	308	280	3,05	231	255	8,20	367	282
1,30	340	317	3,00	232	255	8,05	370	289
1,25	402	382	3,05	303	273	8,20	433	338
1,25	418	400	3,00	312	282	8,10	436	340
1,35	509	481	2,90	314	274	8,05	503	393
1,20	514	492	3,05	326	292	8,10	537	423
1,25	618	576	3,00	330	296	8,05	615	482
1,25	643	606	3,00	391	349	8,15	629	488
			2,85	392	352			
			2,95	445	407			
			3,00	461	413			
			3,00	472	432			
			3,05	547	498			
			3,00	549	488			
			3,00	637	572			
			2,95	647	583			

In Fig. 3 sind diese Werte graphisch aufgetragen, als Abszisse die Anfangsgeschwindigkeit  $v_a$  und als Ordinate die Endgeschwindigkeit  $v_e$ . Für die Länge  $s$  des Wasserweges sind in dieser Darstellung die Mittelwerte

Reihe I  $s = 1,2$  cm

„ II  $s = 3,0$  „

„ III  $s = 8,1$  „

angenommen und die kleinen Schwankungen in der Länge des Weges um wenige Millimeter durch eine entsprechende Korrekt-

tion der betreffenden Endgeschwindigkeit berücksichtigt worden, so daß ein einwandfreier Vergleich der Werte jeder einzelnen Meßreihe untereinander möglich wird.

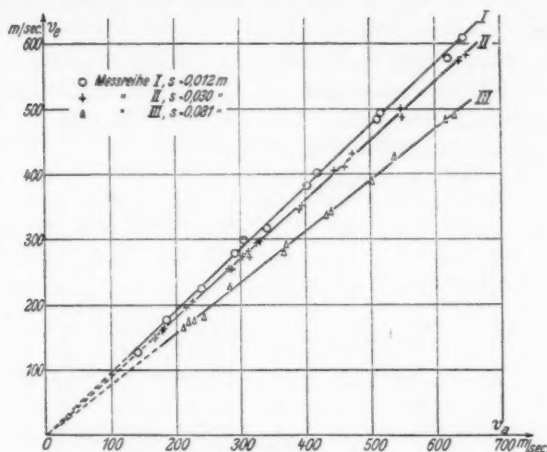


Fig. 3

#### Theoretische Verwertung der Messungen

Jede der drei Meßreihen ergibt als Kurve eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt, führt also zu dem Resultat

$$(1) \quad v_p = v_a \cdot A,$$

wo  $A$ , für jede Meßreihe eine Konstante ist.

Dies entspricht zunächst für jede einzelne Gerade formell dem rein quadratischen Widerstandsgesetz, wonach der Widerstand  $W$  in jedem Augenblick proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist,

$$(2) \quad W = a v^2$$

wie sich durch folgende kurze Rechnung zeigen läßt.

Ist  $\mu$  die Geschossmasse, so ist  $W = -\mu \frac{dv}{dx}$ . Um den Widerstand mit der Länge des Weges in Zusammenhang zu bringen, schreibt man besser

$$W = -\mu \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\mu \frac{dv}{dx} v$$

Zusammen mit Gleichung (2)

$$a v^2 = -\mu v \frac{dv}{dx}$$

Dies ergibt zwischen den Grenzen 0 und  $s$  integriert:

$$(3) \quad \frac{a}{\mu} s = \ln \frac{v_a}{v_e}$$

oder

$$(4) \quad v_e = v_a \cdot e^{-\frac{a}{\mu} s}$$

d. h. Gleichung (1), wobei

$$(5) \quad A_s = e^{-\frac{a}{\mu} s}$$

wird.

Aus den Kurven der Fig. 3 läßt sich nun der Wert für  $A_s$  entnehmen und somit auch  $a/\mu$  berechnen. Man erhält folgende Tabelle:

Kurve	$s$	$a/\mu$
I	0,012 m	4,76 1/m
II	0,030 „	3,48 „
III	0,081 „	3,06 „

Die Verschiedenheit der Werte von  $a/\mu$  zeigt, daß neben dem eigentlichen Widerstandsgesetz noch eine andere Einwirkung vorliegen muß, welche bei den verschiedenen Weglängen in prozentual verschiedener Weise zur Geltung kommt.

Um diesen Zusammenhang aufzuklären, muß man  $a$  oder, was für die Darstellung bequemer ist, den ganzen Exponenten aus Gleichung (4)  $\frac{a}{\mu} s$  als Funktion von  $s$  zeichnen, wie es in Fig. 4 geschehen ist. Es ergibt sich dann eine Gerade mit den Konstanten  $p$  und  $q$  in der Form

$$\frac{a}{\mu} s = f(s) = p s + q$$

Setzt man diesen Ausdruck für  $\frac{a}{\mu} s$  in Gleichung (4) ein, so erhält man die Gleichung, die alle drei Kurven der Fig. 3 einheitlich wiedergibt,

$$(6) \quad v_e = v_a \cdot e^{-(p s + q)}$$

Eine physikalische Deutung dieser Formel findet man leicht, wenn man sie in der Form schreibt:

$$(7) \quad v_e = v_a \cdot e^{-\mu s} \cdot e^{-q}$$

Der erste Faktor  $e^{-\mu s}$  zeigt nämlich, wie in Gleichung (4)  $e^{-\frac{\alpha}{\mu} s}$ , den Geschwindigkeitsverlust an, der nach dem Gesetz  $W = \text{const } v^2$  wächst ( $\text{const} = \mu p$ ), während der Faktor  $e^{-q}$  einen zweiten Geschwindigkeitsverlust andeutet, der von der Länge des Weges unabhängig ist. Da der letztere  $v_a$  propor-

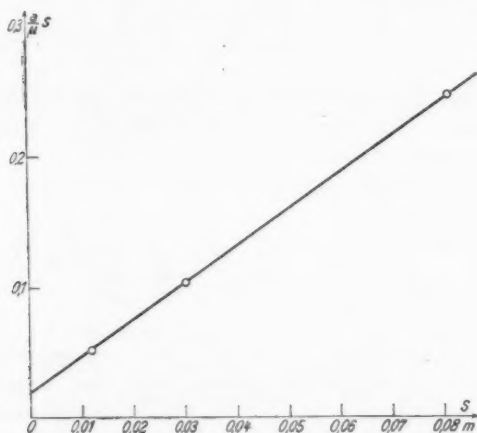


Fig. 4

tionale Verlust auch schon bei den kurzen Wasserstrecken von 1,2 cm vorhanden ist, bleibt nur die Annahme übrig, daß das Geschoß im Augenblick des *Eindringens* in die Wassermasse einen Extrawiderstand findet, der im folgenden als Eindringungswiderstand bezeichnet werden soll.<sup>1)</sup>

Zur Kontrolle dieser Resultate und zur genaueren Berechnung der Konstanten wurden noch einige Messungen mit

1) Daß die Papierwände des Behälters nicht Ursache dieses Widerstandes sind, wurde durch Versuche erwiesen, bei denen mehrere Papierwände innerhalb des Behälters gezogen waren, ohne daß eine merkliche Erhöhung des Widerstandes beobachtet wurde.



längerem Wasserweg von 21 cm ausgeführt, deren Werte Tab. 2 gibt.

Tabelle 2  
Meßreihe IV

$s$	$v_a$	$v_e$
21,30	420	281
21,30	423	284
21,40	581	319
21,55	588	320
21,45	600	328
21,35	605	329
21,30	605	331

Diese Extremmeßreihe ist mit den bisherigen drei Reihen noch einmal in Fig. 5 vereinigt, wobei der Ordinate wieder die

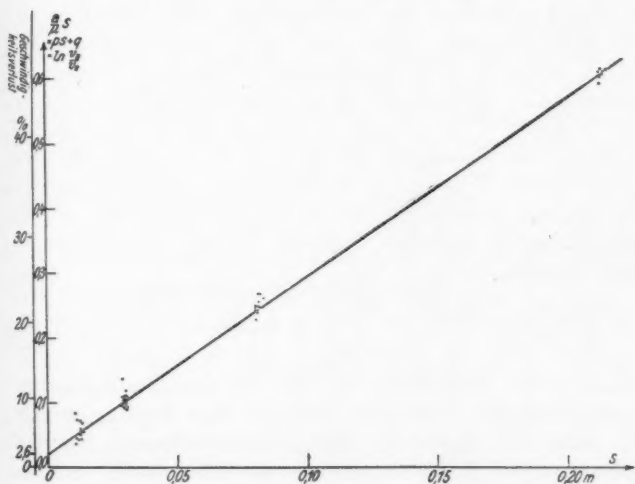


Fig. 5

Größe  $\frac{a}{\mu} s = ps + q = \ln \frac{v_a}{v_e}$  [nach Gleichung (6)], der Abszisse die Länge  $s$  entspricht und anstatt der Mittelwerte in Fig. 4 zur Darstellung des gesamten Materials alle Werte mit ihren speziellen  $s$ -Werten eingetragen sind. Neben der Ordinatenachse ist zur besseren Übersicht die Skala des prozentualen

Geschwindigkeitsverlustes abgetragen, der sich aus Gleich. (6) berechnen läßt. Wie Fig. 5 zeigt, stimmen auch die Werte der Meßreihe IV gut mit dem Widerstandsgesetz Gleichung (6) überein.

Die Größe des Geschwindigkeitsverlustes beim Eindringen in die Wassermasse ergibt sich aus Fig. 5 zu 2,6 Proz., der Koeffizient des quadratischen Widerstandsgesetzes zu  $0,00148 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^3$  mit einer Fehlergrenze von  $\pm 3$  Proz.

#### Vergleich mit sonstigen Widerstandsmessungen

Schreibt man das Widerstandsgesetz in der üblichen Form

$$(8) \quad W = \psi \rho F v^2$$

( $\rho$  = Dichte der Flüssigkeit,  $F$  = Flächenprofil senkrecht zur Bewegungsrichtung), so ist die Widerstandsziffer  $\psi$  nach den Ähnlichkeitsgesetzen für Flüssigkeiten eine Funktion der Reynoldsen Zahl. Man kann daher die aus unsern Messungen gewonnenen Widerstandsziffern mit den Werten vergleichen, die bei anderen Reynoldsen Zahlen z. B. von Hrn. Prandtl<sup>1)</sup> für Kugeln in Luft gefunden wurden. Da jedoch unsere Messungen, abgesehen von den durch die Ähnlichkeitsgesetze erlaubten Variationen, unter wesentlich anderen Versuchsbedingungen wie die Prandtl'schen Werte erhalten wurden, soll im folgenden dargelegt werden, wie weit ein Vergleich berechtigt ist.

Da der Widerstandskoeffizient durch rechnerische Auswertung unserer Versuche für jede bestimmte Geschwindigkeit festgelegt wird, ist es belanglos, daß im Gegensatz zu den Prandtl'schen Messungen bei uns die Geschwindigkeit der Kugel gegen die Flüssigkeit während der Messung variabel ist; außerdem bleibt der Widerstandskoeffizient innerhalb unseres ganzen Meßbereiches konstant und damit auch das Strömungsbild unverändert. Dies schließt Verzögerungserscheinungen aus, die bei Änderung der Strömungsform während der Messung zu befürchten wären.

Ferner wird durch Berücksichtigung des Eindringungswiderstandes dem Umstand Rechnung getragen, daß bei unserm

1) L. Prandtl, Der Luftwiderstand von Kugeln. Göttinger Nachrichten Math.-Phys. Kl. 1914. S. 177.

Versuch der Körper erst während der Messung in das Medium eintritt.

Schließlich ist noch zu untersuchen, wie hoch die Flüssigkeitskompression bei großen Geschwindigkeiten ansteigt, denn die hier benutzten Ähnlichkeitsgesetze sind nur für inkompressible Flüssigkeiten aufgestellt. Der Staudruck  $P_s$  im Scheitelpunkt des Geschosses ist nach den Gesetzen der idealen Flüssigkeit, die auf der Vorderseite des Geschosses angenähert erfüllt sein werden,  $P_s = \frac{1}{2} \rho v^2$ . Für die Maximalgeschwindigkeit von 650 m/sec ergibt sich also ein Druck  $P_s = 2200 \text{ kg/cm}^2$ , und demzufolge eine Kompression des Wassers um 6,7 Proz. Diese starke Kompression tritt nur in der Nähe des Staupunktes auf; da es sich hier aber um eine Betrachtung des gesamten Strömungsvorganges handelt, erscheint es richtiger, mit einer mittleren Dichteänderung zu rechnen, die durch einen mittleren Druck  $P_m$  bedingt wird.  $P_m$  ergibt sich nach der Gleichung  $P_m \cdot F = W$  zu 35 und 670 kg/cm<sup>2</sup> für 150 bzw. 650 m/sec, was einer Dichteänderung von 0,2 bzw. 2,6 Proz. entspricht. Diese Dichteschwankungen 1,002 bzw. 1,026 in unserm Versuche gegenüber 1,001 bei den Prandtl'schen Versuchen sind nicht so erheblich, daß hierdurch die Anwendungsmöglichkeit des Ähnlichkeitsgesetzes in Frage gestellt würde. Sonst würde auch die hier beobachtete Konstanz des Widerstandskoeffizienten zwischen den größten und kleinsten Geschwindigkeiten nicht verständlich sein.

Berechnet man aus unserm Widerstandsgesetz und Gleichung 8

$$W = 0,0015 v^2 = \psi \rho F v^2$$

den Wert der Widerstandsziffer  $\psi$ , so ergibt sich mit  $\rho = 102 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4$  und  $F = 0,951 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

$$\psi = 0,15$$

Hierbei ist noch zu bemerken, daß bei Berechnung des  $\psi$  auf eine Änderung des  $\rho$  infolge der Flüssigkeitskompression keine Rücksicht genommen wurde, da sie unterhalb der Fehlergrenze des Widerstandskoeffizienten liegt.

Durch Zusammenstellung dieses Wertes mit den Prandtl'schen Zahlen erhält man jetzt folgendes Gesamtbild:

Beobachter	Reynoldssche Zahl	Widerstandsziffer	Bemerkungen
Prandtl	50 000	0,24	} Gebiet der kritisch. Reynoldsschen Zahl
	100 000	0,24	
	200 000	0,22	
	280 000	0,10	
	370 000	0,11	
Bauer	1 400 000	0,15	} Konstanz im ganzen Gebiet
	3 000 000	0,15	
	6 000 000	0,15	

Hieraus folgt: Die Widerstandsziffer bleibt anfangs konstant, fällt dann im Gebiet der kritischen Reynoldsschen Zahl stark ab und steigt schließlich zu einem konstanten Wert an, wobei dieser Anstieg bereits in den Prandtl'schen Kurven angedeutet ist.

#### Zusammenfassung

1. Es wurden Kugeln mit Geschwindigkeiten von 650 m/sec bis 150 m/sec wagerecht durch Wasserbehälter von 1—21 cm Länge hindurchgeschossen und der Geschwindigkeitsverlust durch Zeitmessung nach einer Kapazitätsmethode bestimmt.

2. Die Messungen ergaben ein rein quadratisches Widerstandsgesetz  $W = \psi \rho F v^2$ , wobei die Widerstandsziffer  $\psi$  den konstanten Wert 0,15 hat. Hierzu tritt noch ein „Eindringungswiderstand“ des Geschosses in die Wassermasse, der für alle beobachteten Geschwindigkeiten einen Geschwindigkeitsverlust von 2,6 Proz. bedingt.

3. Ein Vergleich mit den  $\psi$ -Werten, die Hr. Prandtl für Kugeln in Luft bei Reynoldsschen Zahlen bis 370 000 fand, läßt es als wahrscheinlich erscheinen, daß die hier bestimmten  $\psi$ -Werte für Reynoldssche Zahlen von 1 400 000—6 000 000 als Fortsetzung der Prandtl'schen  $\psi$ -Kurve betrachtet werden dürfen.

Vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Prof. Ramsauer im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Danzig ausgeführt. Für die wertvollen Ratschläge und die stets rege Anteilnahme möchte der Verfasser auch an dieser Stelle Hrn. Prof. Ramsauer seinen wärmsten Dank aussprechen.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, im März 1926.

(Eingegangen 6. April 1926)

### 3. *Über die zeitliche Ausbildung der Oberflächenspannung von Kochsalzlösungen;* *von E. Kleinmann*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg)

Im Anschluß an die Arbeit der Herren Schmidt und Steyer<sup>1)</sup> über die zeitliche Ausbildung der Oberflächenspannung von Wasser sollten die (wasserfall-<sup>2)</sup> und lichtelektrisch<sup>3)</sup> schon gut bekannten) *Kochsalzlösungen* hinsichtlich ihrer Ausbildung der Oberflächenspannung untersucht werden, um auch von dieser Seite her Aufschluß über die Vorgänge in der Oberflächenschicht der Flüssigkeiten zu erhalten. Das Meßverfahren wurde hierzu weiter verfeinert; die Ergebnisse finden sich am Schluß zusammengefaßt.

I. 1. *Das Versuchsgesät* ist im wesentlichen das von den Herren Hiss und Schmidt und Steyer benutzte. Zugrunde liegt die bekannte Bestimmung der Oberflächenspannung durch Messung der Steighöhe in engen Röhren. Ein Steigrohr, oben mit feiner und genau gemessener Öffnung versehen, taucht in die Flüssigkeit, die durch Schlitten lotrecht verschoben werden kann, und die durch Druckluft im Steigrohr hochgesaugt und zersprüht wird (Herstellung frischer Oberflächen); die Zeitangabe erfolgt durch ein Helmholtzsches Pendel, das auf seinem Weg zwei Kontakte betätigt: Kontakt I stellt die Blase-  
 luft durch eine Fallklappe ab; Kontakt II, auf einem Schlitten verschiebbar (Zeitschlitten), gibt Beleuchtung der kapillaren

1) H. Steyer, Diss., Heidelberg 1924. — F. Schmidt und H. Steyer, Neue Untersuchungen über die zeitliche Änderung der Spannung reiner Wasseroberflächen; Ann. d. Phys. 79. 1926; hier auch weitere Lit.-Angaben.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 46. S. 629. 1892; Probleme komplexer Moleküle 1914. Kap. VII; Aselmann, Ann. d. Phys. 19. S. 960. 1906; W. Busse, Ann. d. Phys. 76. S. 493. 1925.

3) W. Zimmermann, Diss., Heidelberg 1926.

Öffnung des Steigrohres durch einen elektrischen Funken, dessen Bild auf der Flüssigkeitsoberfläche im Mikroskop beobachtet wird.

*Verfahren:* Innerhalb der sehr kurzen kapillaren Öffnung des Steigrohres wird der Durchgang der Flüssigkeit durch eine feste Marke, gegeben durch das Verschwinden des Funkenbildes im Mikroskop, beobachtet (Fig. 1, Marke 4). Hr. Hiß benützt noch ohne Mikroskop eine mehrere Millimeter unterhalb gelegene Marke, wodurch eine Fallzeit, und Kontakt I als

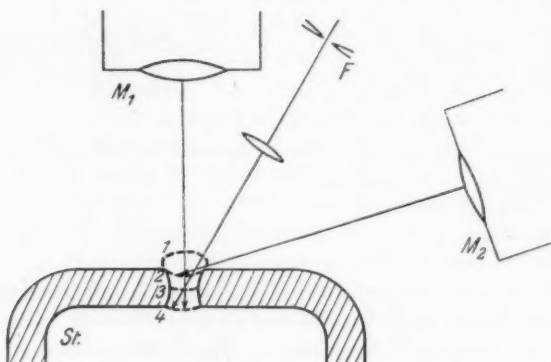


Fig. 1. Einschlüpfen der Flüssigkeit

St Steigrohr; F Funkenbeleuchtung;  $M_1$  senkrecht,  $M_2$  schief } Mikroskop.  
Durchmesser des Steigrohres 5 mm, der Öffnung 0,7060 mm

Zeit Null, wodurch eine „tote“ Zeit hereinkommt. Die Herren Schmidt und Steyer verbessern dies und erkennen außerdem, daß die Zeit, die die Flüssigkeit braucht, um nach Abstellen des Luftstroms von Marke 1 bis Marke 4 zu gelangen („Einschlüpfzeit“) nicht vernachlässigt werden darf. In der Figur ist, stark vergrößert und mit übertriebener Länge des Öffnungskanals, die Oberfläche der einschlüpfenden Flüssigkeit in vier aufeinander folgenden Augenblicken gezeichnet: 1 nach Abstellen des Luftstromes, 2 oberhalb des Hängenbleibens, 3 Stelle des Hängenbleibens, 4 unterhalb des Hängenbleibens. Der Kunstgriff, diese Einschlüpfzeit zu eliminieren und den Beginn der Hängezeit neu zu definieren, besteht nach den

Herren Schmidt und Steyer darin, daß durch ein *zweites* (*schiefes*) *Mikroskop*<sup>1)</sup> der Durchgang der Flüssigkeit durch Marke 2 beobachtet wird; durch verschiedene Neigung des Mikroskopes läßt sich diese Marke immer näher an 3 heranbringen und so extrapolatorisch der Beginn der Hängezeit genau festlegen. Strenggenommen müßte, um das Ende der Hängezeit mit derselben Sicherheit festzulegen, Marke 4 ebenso extrapolatorisch (durch Heben des senkrechten Mikroskopes) von untenher nach 3 geschoben werden; bei der wirklichen Ausführung zeigt sich, daß Marke 4 und 3 benachbart genug sind, um diese Korrektion unterlassen zu können.

Ein übersichtlicheres und auch in der Ausführung einfacheres Verfahren, wodurch es gelang, mit dem senkrechten Mikroskop allein auszukommen, ergab sich im Laufe der vorliegenden Arbeit. Beobachtet man nämlich den Durchgang durch Marke 4 von sehr großen Steighöhen an (wo die Marke noch ohne Wirkung der Oberflächenspannung durchfallen wird), und verringert die Steighöhe stufenweise, so verspätet sich ebenso stufenweise (linear) der Durchgang durch diese Marke. Dies entspricht der Voraussetzung, daß das Einschlüpfen unter dem Einfluß des hydrostatischen Zuges der gehobenen Flüssigkeitssäule nach dem Poiseuilleschen Gesetz erfolgt. Wäre die Flüssigkeit ohne zeitliche Ausbildung der Oberflächenspannung, so ging dieser lineare Abfall bis nahe zur der normalen Oberflächenspannung entsprechenden Steighöhe (Fig. 2), während die beobachtete Kurve vorher abbiegt und sich asymptotisch dem statischen Wert der Oberflächenspannung nähert. Die *Abszissendifferenzen* geben ohne weiteres die reinen Hängezeiten. Nach dieser Methode sind die meisten der hier wiedergegebenen Kurven gewonnen worden; natürlich wurden auch viele Messungen nach der früheren Methode gemacht, die genügende Übereinstimmung ergaben, besonders wenn man nicht zu nahe an den statischen Wert heruntergeht, wo nach beiden Methoden Unsicherheiten auftreten.

Wie in der Arbeit der Herren Schmidt und Steyer wird auch im folgenden als Zeit  $t = 0$  der Beginn der Hängezeit bezeichnet. Das wirkliche Alter der Flüssigkeitsoberfläche

1) Vgl. die Figur bei F. Schmidt und H. Steyer, a. a. O.

ist aber eben infolge der endlichen Einschlüpfzeit *größer*; und zwar ist die Hängezeit Mindestalter, Hängezeit + Einschlüpfzeit Höchstalter, da die Beruhigung der Oberfläche nach dem Sprühen noch einen Teil der Einschlüpfzeit andauert. Es gelang, diese Verhältnisse zu klären durch Beobachtung des *Funkenbildes* im Mikroskop, das<sup>1)</sup> durch sein Aussehen die Beruhigung der Oberfläche und durch seine Lage den Ort der einschlüpfenden Flüssigkeit zu beurteilen gestattet. Damit ist

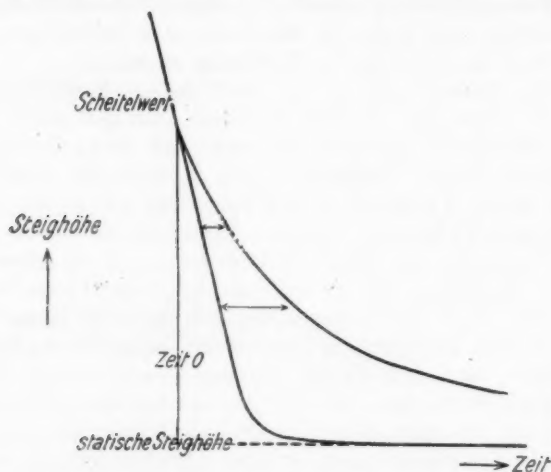


Fig. 2. Die Hängezeiten als Abszissendifferenzen

insbesondere auch der bisher noch mögliche Einwand beseitigt, daß die beobachteten Hängezeiten infolge länger dauernder Durchwirbelung gefälscht sein könnten; vielmehr kann jetzt das Ende der Durchwirbelung, also der Beginn des Alterns unmittelbar festgelegt werden.<sup>2)</sup>

So liegen jetzt drei verschiedene einander stützende Verfahren vor (schiefes Mikroskop-Abszissendifferenzen-Funkenbild), die dem experimentellen Befund Sicherheit verleihen.

1) Natürlich im Mittel über viele Einzelbeobachtungen (wie bei den anderen Verfahren auch).

2) Freilich nicht mit derselben Schärfe wie der Beginn der Hängezeit, der eben deshalb als  $t = 0$  beibehalten wurde.



2. Im Laufe der Arbeit waren noch zwei Schwierigkeiten zu erkennen und zu beheben: die Abhängigkeit der gemessenen Steighöhe vom Druck der Blaseluft<sup>1)</sup>; und die Abhängigkeit der gemessenen Zeit von Strom und Spannung im Halmagnet der Fallklappe. Der letzteren wurde durch Einbau eines Strom- und Spannungsmessers Rechnung getragen; beide waren sorgfältig konstant zu halten, denn sowohl die gewöhnlichen Stromschwankungen infolge wechselnder Stromentnahme in der Leitung, als auch (wenigstens bei dem neueren Verfahren) das allmähliche Warmwerden des Fallklappenmagneten — der also vor Beginn der Versuche anzuheizen ist — bedingen Fehler. Der Einfluß der Blaseluft äußert sich in der Weise, daß während des Blasens an der kapillaren Öffnung ein Unterdruck herrscht, gemessen durch die Höhe derjenigen Flüssigkeitssäule, die der Luftstrom gerade noch halten könnte. Nach Abstellen der Luft erfolgt Ausgleich dieses Unterdrucks und kurz dauernder Überdruck, der die Steighöhe um einen gewissen, aus einer Korrektionskurve zu entnehmenden Betrag  $dh$  (die Oberflächenspannung um  $d\alpha$ ) erniedrigt. Man gewinnt diese Korrektionskurve (Fig. 3) durch Messungen des statischen Werts der Oberflächenspannung bei verschiedenen Blasedrucken  $p$  (man stellt dabei den Zeitschlitten auf  $t = \infty$ , d. h. praktisch für Wasser auf  $1/100$  sec). Dabei treten aber einige besondere Schwierigkeiten auf. Erstens hängt die Korrektion außer vom Blasedruck auch von der Anordnung von Steig- und Blaserohr ab; diese ist nach jeder Änderung so wiederherzustellen, daß stets derselbe (möglichst niedrige) Blasedruck notwendig ist, um Wasser bis zur statischen Steighöhe hochzusaugen. Zweitens ist zwar auf Grund einer einfachen Überlegung zu erwarten, daß  $d\alpha$  linear mit  $p$  zunimmt, und dies trifft auch für gewisse mittlere  $p$  in der Tat genau genug zu. Aber für kleine  $p$  weicht die Korrektionskurve von der Geraden ab und erreicht bei etwa 5 mm Hg ein Minimum. Mit ganz schwachem Luftstrom gelingt es also, eine größere Steighöhe, die nur noch sehr wenig unter der wirklichen statischen Steighöhe liegt, zu erzielen als mit völlig abgestellter Luft.

1) Bei F. Schmidt und H. Steyer, a. a. O., erwähnt, aber noch nicht eingehend untersucht.

Die Erklärung dieser Erscheinung ist folgende: drosselt man den Luftstrom nach dem Hochsaugen langsam ab bis zu genügend kleinen Werten von  $p$ , jedoch nicht bis 0, so schlüpft die Flüssigkeit schon vor Betätigung der Fallklappe bis Marke 3 ein und hält sich dort, ohne vorzeitig abzufallen; bei völligem Abstellen der Luft jedoch wird die Flüssigkeit (ebenso wie bei höheren Blasedrucken nach Fallen der Klappe) schneller einschlüpfen, Marke 3 mit einer gewissen endlichen Geschwindigkeit erreichen und erst bei entsprechend erniedrigter Steighöhe hängen bleiben. Man hat also, um die wahre Korrektur zu

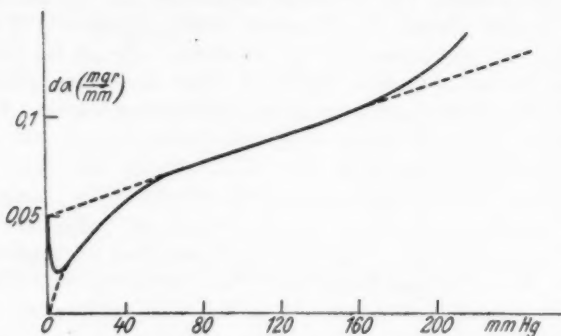


Fig. 3

Korrektur  $da$  in Abhängigkeit vom Blasedruck; Wirkung des Drucks (linear) und des Einschlüpfens (Minimum)

finden, die beobachtete Kurve für  $p \rightarrow 0$  zu extrapolieren;  $da$  wird so um etwa 0,05 mg/mm größer. Diese Bemerkung ist wichtig, wenn man den statischen Wert der Oberflächenspannung auf diesem Weg genauer bestimmen will, der sonst stets zu niedrig ausfallen wird. Es läßt sich so der völlige Anschluß an die besten anderen Verfahren der Oberflächenspannungsmessung<sup>1)</sup> gewinnen.

Auch für große  $p$  weicht die Korrektionskurve von der Geraden ab, und zwar nach oben, wohl infolge Luftwirbelbildung; ein gewisser mittlerer Blasedruck (80—150 mm Hg)

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 74. S. 381. 1924.

ist also einzuhalten: groß genug, damit er zum Zersprühen ausreicht (einen Anhaltspunkt dafür gibt die Veränderung des Funkenbildes bei zunehmendem Blasedruck), aber nicht zu groß, damit die Korrektur im linearen Bereich bleibt.

II. Die Versuche mit Wasser hatten schon ergeben<sup>1)</sup>, daß die Abklingungskurven Exponentialkurven sind, was auch von vornherein zu erwarten ist, wie man sich auch im einzelnen den Mechanismus des Vorganges vorstellen möge. Dies tritt besonders hervor, wenn man die Oberflächenspannungswerte in logarithmischem Maße aufträgt. In der Tat werden dann die Abklingungskurven geradlinig, und man hat ganz allgemein als Zusammenhang zwischen der seit Bestehen der Oberfläche verstrichenen Zeit  $t$  und der zu dieser Zeit noch vorhandenen Erhöhung  $\delta\alpha$  über den statischen Wert der Oberflächenspannung

$$\delta\alpha = \Delta\alpha \cdot e^{-at} \quad \text{oder} \quad \ln \delta\alpha = \ln \Delta\alpha - at$$

Dabei bezeichnet die Konstante  $\Delta\alpha$  den Wert von  $\delta\alpha$  für  $t = 0$  (Scheitelwert), und die Konstante  $\tau = \frac{1}{a}$  ist die Zeit, in der  $\Delta\alpha$  auf den  $e$ -ten Teil sinkt. Wir bezeichnen  $\tau$  als Abklingungsdauer,  $a$  als Abklingungsgeschwindigkeit.

Untersucht wurden die Konzentrationen 0, 2, 5, 10, 15, 20, 25 Proz. Die Ergebnisse sind in Tab. 1 und den Kurven 4 bis 6 niedergelegt. Alles bezieht sich auf 20° C. In die Tabelle aufgenommen sind.

1. Die Normalität  $m$  der Lösung<sup>2)</sup>  $\left(\frac{g - \delta_{qu}}{1}\right)$ ; 2. das spezifische Gewicht  $s^3$ ; 3. die Oberflächenspannung  $\alpha$  in  $\text{mg/mm}^3$ ; 4. die spezifische Oberflächenspannung  $\alpha/\alpha_0$ ; 5. die spezifische Zähigkeit  $z = \frac{\eta}{\eta_0}$ <sup>3)</sup>; 6. der elektrolytische Dissoziationsgrad  $\alpha$ , berechnet aus dem Äquivalentleitvermögen<sup>2)</sup>  $\left(\alpha = \frac{A}{A_0}\right)$ ; 7.—12. die experimentell gefundenen Daten.

1) F. Schmidt und H. Steyer, a. a. O.

2) Nach Kohlrausch-Holborn, Leitv. d. Elektrolyte, 2. A. 1916.

3) Nach Landolt-Börnstein, Tabellen. 5. A. 1923.

Tabelle 1

$p\%$	$m$	$s_{20\ 20}$	$\alpha \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	$\alpha/\alpha_0$	$z$	$a$
0	0	1,000	7,40	1,000	1,00	1,00
2	0,85	14	45	0,07	04	0,76
5	88	35	55	018	09	69
10	1,83	72	70	040	19	60
15	2,84	110	90	065	32	54
20	3,92	149	8,10	095	47	46
25	5,08	191	35	130	67	38

$p\%$	$\Delta\alpha \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	$\bar{\Delta}\alpha \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	$\tau \cdot 10^3 \text{ sec}$	$\tau_0/\tau$	$\bar{\Delta}\alpha/\bar{\Delta}\alpha_0$	$\alpha_t = 0 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
0	1,30	9,5	2,5	1,00	1,00	16,9
2	65	7,0	3,3	0,76	0,74	14,5
5	75	6,6	3,7	68	69	14,2
10	80	5,5	4,5	56	58	13,2
15	80	4,6	5,3	47	49	12,5
20	80	4,3	5,9	42	45	12,4
25	90	3,8	7,0	36	40	12,2

Die auf Wasser bezüglichen Größen haben die Marke 0. Schon die Fig. 4 zeigt, daß der Vorgang des Alterns der Oberfläche in Abhängigkeit von der Konzentration der Lösung in einfacher Weise beschrieben werden kann. Die Abklingungsdauer  $\tau$  nimmt mit zunehmender Konzentration bis zur Sättigung zu; der Scheitelwert  $\Delta\alpha$  nimmt bis etwa 6% zu, um sich dann wenig mehr zu ändern. Wir betrachten diese zwei zur vollständigen Beschreibung des Vorgangs notwendigen und hinreichenden Größen nun genauer.

1. *Abklingungsdauer  $\tau$ .* In Betracht kommt zunächst der Vergleich mit Wasser, also der Quotient  $\tau/\tau_0$ . Ist das Altern ein Vorgang, der sich gegen Reibungswiderstände durchsetzt, so liegt es nahe, zu vermuten, daß die *innere Reibung*  $\eta$ , hier also der Quotient  $z = \frac{\eta}{\eta_0}$ , der ja auch bis zur Sättigung zunimmt, der Abklingungsdauer proportional sei. Fig. 6 zeigt aber ohne weiteres, daß dies nicht der Fall ist, ja, daß überhaupt zwischen Abklingungsdauer und innerer Reibung kein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Dies bedeutet aber

noch nicht, daß das Altern kein Vorgang von Ionenverschiebungen sei, denn nach Hrn. Lenards Befund<sup>1)</sup> sind die elektrolytischen Ionen bereits zu klein, um ihre Geschwindigkeit hydrodynamisch, d. h. mit Benutzung der wenn auch korrigierten Stokesschen

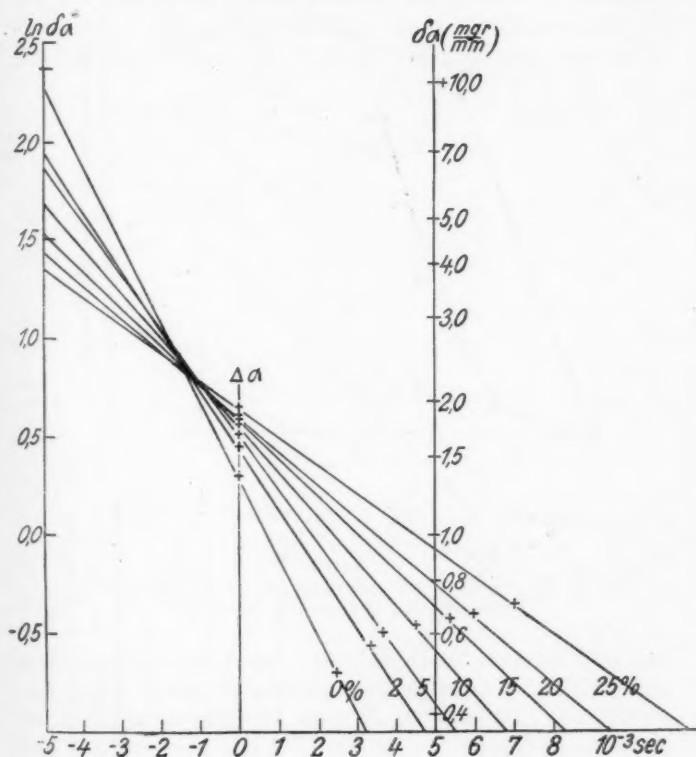


Fig. 4

Abklingkurven für verschiedene Konzentrationen (20° C)

Formel auf Grund der inneren Reibung zutreffend berechnen zu lassen. Dagegen schließt sich die Kurve  $\tau_0/\tau$  überraschend

1) P. Lenard, Wanderungsgeschw. kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien. Ann. d. Phys. 61. S. 665 u. 718. 1920.

gut der Kurve des „Dissoziationsgrades“  $\alpha$  an. Diese Größe  $\bar{\alpha}$ , welche wir der Klarheit halber als „Kohlrauschen Dissoziationsgrad“ bezeichnen wollen, ist gleich dem Produkt aus

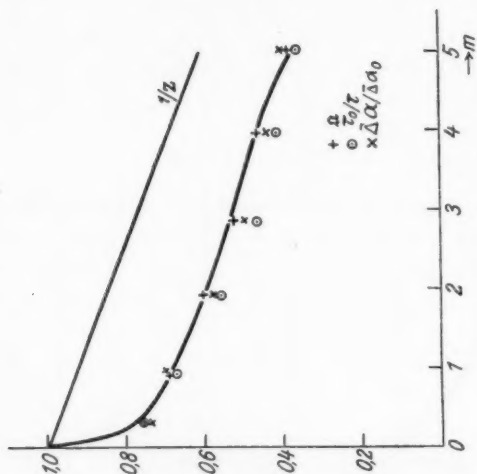


Fig. 6

Kohlrausch Dissoziationsgrad  $\alpha$ ;  $\tau_0/\tau$ ;  $\alpha/\alpha_0$ ;  $1/\alpha$  in Abhängigkeit von der Konzentration

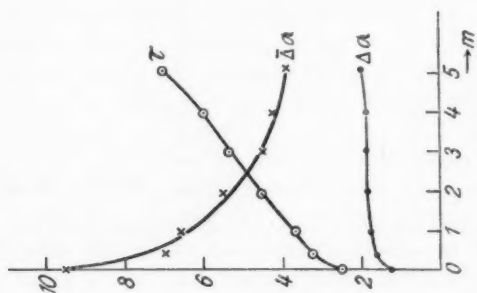


Fig. 5

Abklingdauer u. Scheitelwert in Abhängigkeit von der Konzentration ( $\Delta\alpha$  u.  $\bar{\alpha}$  in mgr/mm;  $\tau$  in  $10^3$  sec)

wirklichem Dissoziationsgrad  $D$  und der Summe der Ionenbeweglichkeiten  $u + v$ . Es ist also ein Zusammenhang mit der Ionenbeweglichkeit ersichtlich, falls anzunehmen ist, daß der Abfall von  $\alpha$  auf ein Sinken von  $u + v$ , nicht von  $D$  zurückzuführen ist. Jedenfalls haben wir das experimentelle Er-

gebnis: Die Abklingungsgeschwindigkeit ist proportional dem Kohlrauschschen Dissoziationsgrad.

2. *Scheitelwert  $\Delta\alpha$* . Von dem zu Beginn der Hängezeit ( $t = 0$ ) vorhandenen experimentell unmittelbar zugänglichen  $\Delta\alpha$  ist der wahre, ganz frischer Oberfläche zukommende Scheitelwert  $\bar{\Delta}\alpha$  zu unterscheiden, der nach Feststellung des Beginns des Alterns (vgl. I, 1: Funkenbild) extrapolatorisch

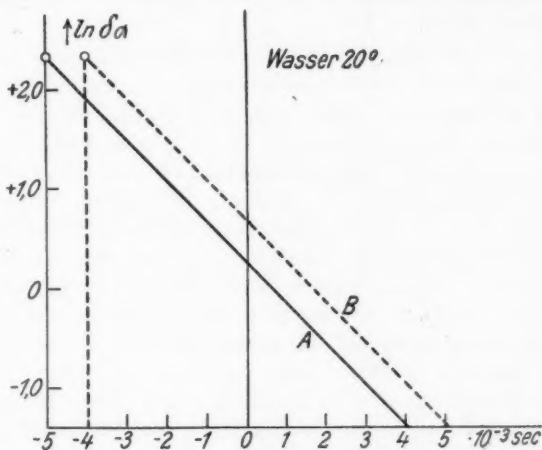


Fig. 7

Abklingungskurven für die seitherige Röhre (A) und für die neue Röhre (B) mit kürzerer Einschlüpfzeit

erschlossen werden kann. Bei dem meistbenutzten Steigrohr und dem üblichen Blasedruck ist bei Beginn der Hängezeit die Flüssigkeitsoberfläche etwa  $5 \cdot 10^{-3}$  sec alt. Die Kurven sind also bis etwa  $-5 \cdot 10^{-3}$  sec rückwärts zu verlängern, um zum wahren Scheitelwert zu gelangen.<sup>1)</sup>

Um die Berechtigung dieser Extrapolation zu prüfen, wurden mit einem Steigrohr mit kegelförmiger Spitze, bei dem eine kürzere Einschlüpfzeit zu erwarten ist, die Messungen für Wasser wiederholt. Die Einschlüpfzeit war hier etwa

1) Auch für die Kurven bei Schmidt u. Steyer, a. a. O., gilt diese Bemerkung.

$1 \cdot 10^{-3}$  sec kürzer,  $\Delta\alpha$  größer; die Extrapolation auf  $\bar{\Delta}\alpha$  ( $-4 \cdot 10^{-3}$  sec rückwärts) ergab gute Übereinstimmung mit dem früher gefundenen Wert (Fig. 7).

Damit kommt man (Fig. 5) zu sehr hohen Scheitelwerten, die außerdem bis zur gesättigten Lösung *abnehmen*. Der Quotient  $\bar{\Delta}\alpha/\bar{\Delta}\alpha_0$  folgt bemerkenswerterweise wieder dem Kohlrauschschen Dissoziationsgrad. Also auch der Scheitelwert ist wahrscheinlich proportional dem Kohlrauschschen Dissoziationsgrad.

III. Alles Bisherige gilt für Zimmertemperatur (20° C). Eine *Veränderung der Temperatur* bietet in mehrfacher Hinsicht Interesse; dabei ändert sich der Kohlrauschsche Dissoziationsgrad  $\alpha$  so gut wie nicht (für  $\frac{1}{10}$  n-NaCl-Lösung<sup>1)</sup> bei 18° 0,84, bei 100° 0,82). Untersucht wurden außer Wasser die Konzentrationen 2, 5, 18 Proz. bei hohen und tiefen Temperaturen; der Temperaturbereich ist dadurch beschränkt, daß jeweils der ganze Versuchsraum auf die gewünschte Temperatur gebracht werden muß. Für die Ausführung der Versuche bei höherer Temperatur stand ein großer elektrischer Ofen zur Verfügung, der in kurzer Zeit den (nicht großen) Raum bis etwa 40° zu heizen gestattete. Die durch einen großen Windkessel geleitete Blaseluft wurde durch Heizen des Kessels mit Bunsenbrenner vorgewärmt; war der Kessel einmal warm, so hielt die Luft ihre Temperatur ziemlich konstant. Auch die Lösung selbst wurde, um die Anheizzeit abzukürzen, vorgewärmt. Die Versuche zeigten, daß die drei Temperaturen (Blaseluft, Lösung, Zimmer) nicht genau gleich zu sein brauchten, insofern die Zimmertemperatur die Temperatur der Druckluft auf ihren Weg und dadurch auch die der hochgesaugten Lösung sich angleicht, so daß bei kleinen Temperaturunterschieden die Zimmertemperatur als ausschlaggebend betrachtet werden kann. Die tieferen Temperaturen wurden durch die Winterkälte erzielt; wenn während des Arbeitens die Temperatur einige Grad stieg, wurde mit mittleren Werten gerechnet. Tab. 2<sup>2)</sup> enthält die wichtigsten Versuchsergebnisse.

1) Nach Kohlrausch-Holborn, Leitvermögen.

2) Die Abklingungskurven für die verschiedenen Konzentrationen und Temperaturen sind hiernach leicht zu zeichnen (analog Fig. 4).



Tabelle 2

Wasser

°C	$\eta \cdot 10^3$ CGS	$\Delta\alpha \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	$\tau \cdot 10^3 \text{ sec}$	$\tau \cdot \frac{T}{\eta}$	$\Delta\alpha \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	$\alpha_t = 0 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
0	18 <sup>1)</sup>	—	—	—	—	—
4	16	0,2	4,5	77	0,6	8,2
7	14	0,4	3,8	75	1,6	9,2
10	13	1,0	3,3	76	4,0	11,6
13	12	1,6	3,2	75	7,3	14,8
20	10	1,4	2,5	74	9,5	16,9
30	8	0,6	1,8	68	10,0	17,3
2 Proz.						
10	13,5	1,0	4,5	94	3,0	10,6
20	10,5	1,6	3,3	93	7,0	14,5
35	8	1,0	2,0	79	10,0	17,3
40	7	0,5	1,7	80	10,0	17,2
5 Proz.						
5	16	0,7	5,0	87	2,0	9,8
10	14	1,1	4,6	93	3,5	11,2
20	11	1,8	3,7	98	7,5	15,0
30	9	1,45	2,6	88	10,0	17,4
40	7	1,0	2,0	89	10,0	17,2
18 Proz.						
5	21	0,7	7,7	102	1,5	9,8
10	18	1,1	6,7	105	2,0	10,1
20	15	1,8	5,5	107	4,5	12,5
35	10	1,4	3,6	110	5,5	13,3

1. Die Abklingungsdauer nimmt bei allen Konzentrationen ab mit zunehmender Temperatur; und zwar zeigt sich, daß der Ausdruck  $\tau \cdot \frac{T}{\eta}$  für jede Konzentration einen innerhalb der Versuchsfehler konstanten Wert hat. Betrachtet man andererseits  $\tau$  für mehrere Temperaturen in Abhängigkeit von der Konzentration, so findet man, daß  $\tau_0/\tau$  wieder nahe mit dem Kohlrauschschen Dissoziationsgrad zusammenfällt. Während also für festes  $T$   $1/\tau$  proportional  $\alpha$  ist, ist für festes  $\alpha$   $1/\tau$  proportional  $T/\eta$ .

Da der Temperaturkoeffizient der inneren Reibung nahe zusammenfällt mit dem der Ionenbeweglichkeit<sup>2)</sup> (die feineren Unterschiede können bei diesen Versuchen nicht zum Ausdruck

1) In runden Zahlen nach Landolt-Börnstein.

2) Vgl. dazu P. Lenard, Wanderungsgeschwindigkeit, S. 730.

kommen), so findet man also auch hier, daß die Abklingungsgeschwindigkeit Zusammenhang mit der Ionenbeweglichkeit zeigt, und zwar (hier wie bei der Abhängigkeit von der Konzentration) *proportional* derselben zu sein scheint.

2. *Scheitelwert  $\Delta\alpha$* . Die Kurve für Wasser erreicht, von  $0^\circ$  ausgehend, ein Maximum zwischen  $10$  und  $15^\circ$ , fällt dann ab, um sich (wohl asymptotisch) wieder  $0$  zu nähern. Ähnlich verlaufen die Kurven der verschiedenen Salzkonzentrationen, die der konzentrierteren Lösungen (von  $5$  Proz. ab) nahe zusammenfallend, unter  $5$  Proz. Übergangskurven zur Kurve des reinen Wassers (Fig. 8).

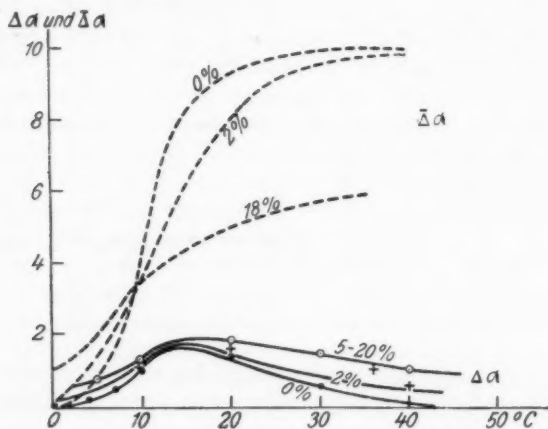


Fig. 8

Abhängigkeit von  $\Delta\alpha$  und (schematisch) von  $\bar{\Delta}\alpha$  von der Temperatur

Geht man zu dem wieder nur durch Extrapolation erreichbaren *wirklichen Scheitelwert  $\bar{\Delta}\alpha$*  über (Fig. 8), so verschiebt sich das Bild. Die  $\bar{\Delta}\alpha$ -Kurve für Wasser steigt zuerst stark an und bleibt dann ungefähr konstant, um wohl bei höheren Temperaturen ( $> 50^\circ$ ) wieder abzufallen. Die  $\bar{\Delta}\alpha$  der Salzkurven verlaufen je konzentrierter desto flacher<sup>1)</sup>, und zwar

1) Das heißt, desto mehr tritt die Wasserbewegung in der Oberfläche zugunsten der Ionenbewegung zurück. Vgl. die Abflachung der Temperaturkurven der verschiedenen Wassereigenschaften (Dichte,

in der Art, daß bei tiefen Temperaturen  $\bar{\Delta}\alpha > \bar{\Delta}\alpha_0$ ; in einem mittleren Temperaturbereich  $\bar{\Delta}\alpha < \bar{\Delta}\alpha_0$ ; bei noch höheren Temperaturen vielleicht wieder  $\bar{\Delta}\alpha > \bar{\Delta}\alpha_0$ . In der Gegend von  $10^\circ$  werden die  $\bar{\Delta}\alpha$  ungefähr gleich. Die Kurven für  $50-100^\circ$  mag man sich etwa symmetrisch zu  $0-50^\circ$  denken. Wieder scheint der Kohlrauschsche Dissoziationsgrad die Veränderungen mit zunehmender Konzentration zu beherrschen.

Die absoluten Werte von  $\bar{\Delta}\alpha$  sind sehr hoch; Wasser erreicht oberhalb  $30^\circ$  eine Oberflächenspannung gleich der dreifachen statischen.

#### Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit sollte die zeitliche Ausbildung der Oberflächenspannung der Kochsalzlösungen soweit wie zurzeit möglich experimentell geklärt werden. Ein gegen früher vereinfachtes Verfahren (I) ermöglichte die Ausführung der hierzu notwendigen zahlreichen Meßreihen. Die Beobachtung des Funkenbildes im Mikroskop gibt ein Mittel, die Beruhigung der Oberfläche nach Abstellen des Luftstromes zu verfolgen und so den Beginn des Alterns festzulegen. Es sind Abklingungsdauer und Scheitelwert in ihrer Abhängigkeit von Konzentration (II) und Temperatur (III) darzustellen, wobei die erstere, für die nächsten Folgerungen wichtigere dieser beiden Größen unmittelbar zu fassen ist, während die zweite extrapolatorisch erschlossen werden muß. Der Kohlrauschsche elektrolytische Dissoziationsgrad (Produkt aus wirklichem Dissoziationsgrad und Summe der Ionenbeweglichkeiten) beherrscht die Konzentrationsabhängigkeit, der Temperaturkoeffizient der Ionenbeweglichkeiten beherrscht die Temperaturabhängigkeit der Abklingungsdauer, wogegen der Scheitelwert ein verwickelteres, hier vorläufig nicht näher zu behandelndes Verhalten an den Tag legt. Man kann versuchen, die Ergebnisse zu deuten, indem man zuerst die nur von den Ionen herrührenden Erscheinungen *relativ zu Wasser* ( $a/a_0$ ) betrachtet, wobei das Bild<sup>1)</sup> der unter dem Einfluß der Molekularkräfte

Kompressibilität, spezifische Wärme, Reibung) mit zunehmendem Druck; Ionenlösungen = höherer innerer Druck. — Das Maximum der  $\bar{\Delta}\alpha$  liegt in der Gegend des Minimums der Kompressibilität.

1) P. Lenard, Probl. kompl. Mol. II.

einwärts wandernden Ionenkomplexe als gerechtfertigt erkannt, die Auffassung des Kohlrauschschen Dissoziationsgrades als eines reinen Beweglichkeitsverhältnisses (d. h. die Annahme konstanten, gleich eins zu setzenden wirklichen Dissoziationsgrades) nahegelegt wird und quantitativer Anschluß an die Formeln Hrn. Lenards (Probl. kompl. Mol. II, Kap. V) gewonnen werden kann. Um auch die Erscheinungen bei *Wasser*, denen sich die Ionenwirkungen überlagern, zu verstehen, muß ein Zusammenhang mit der Ausbildung der elektrischen Doppelschicht in der Wasseroberfläche angenommen werden. Denn die gefundenen Zeiten sind sehr viel länger, als sie dem Einwärts- oder Auswärtswandern von Molekeln an der Oberfläche nach den dafür von Hrn. Lenard, a. a. O., entwickelten Gleichungen entsprechen, stimmen aber zu den für die Ausbildung der Doppelschicht gefundenen Zeiten. Die nach hundertstel Sekunden zählende Ausbildungszeit des statischen Oberflächenzustandes ist wohl den Elektronenverschiebungen zuzuordnen, deren Folge die durch die wasserfallelektrischen Erscheinungen nachgewiesene negative Ladung der äußersten Molekelschicht ist.

Die hier nur angedeuteten Gedanken sollen nach Erlangung weiteren, an anderen Ionenlösungen (insbesondere H<sup>+</sup>-Ionen) zu gewinnenden experimentellen Materials weiter verfolgt werden.

Zum Schluß ist es mir Bedürfnis, Hrn. Geh. Rat Lenard, auf dessen Anregung und in dessen Institut die vorliegende Arbeit gemacht wurde, für stete Anteilnahme und Förderung herzlichst zu danken. Ferner sei Hrn. Dr. F. Schmidt für viele Ratschläge bestens gedankt.

Heidelberg, April 1926.

(Eingegangen 10. April 1926.)

#### 4. *Über die Ionisierung von Luft durch Röntgen- und Kathodenstrahlen;* *von Helmuth Kulenkampff*

##### 1. Problemstellung

Die Frage, ob die ionisierende Wirkung der Röntgenstrahlen eine direkte oder eine indirekte sei, ist in früheren Jahren vielfach erörtert und experimentell untersucht worden.<sup>1)</sup> Sie kann heute mit voller Gewißheit dahin beantwortet werden, daß — in Übereinstimmung mit den allgemeinen Vorstellungen über die quantenhafte Absorption der Strahlung — die Ionisierung überwiegend indirekt erfolgt: die Strahlung erzeugt, für jedes absorbierte  $h\nu$ , ein Photoelektron entsprechender Geschwindigkeit und dieses ionisiert das Gas; dabei ist die von ihm gebildete Ionenzahl so groß, daß das eine Ionenpaar, welches bereits primär bei der Bildung des Photoelektrons entsteht, demgegenüber nicht in Betracht kommt. Bei harten Röntgenstrahlen treten zu den Photoelektronen hinzu die Rückstoßelektronen des Comptoneffektes, deren Geschwindigkeit jedoch sehr klein gegenüber derjenigen der Photoelektronen ist.

Die älteren Untersuchungen konnten nicht immer eine ganz eindeutige Entscheidung in dieser Frage bringen; die schönen Nebelspuraufnahmen von C. T. R. Wilson<sup>2)</sup> lassen aber keinen Zweifel mehr, daß der Vorgang sich in der hier skizzierten Weise abspielt. Die Bahn eines Röntgenstrahls, welcher die Nebelkammer durchsetzt, ist selbst von Ionen völlig frei, nur stellenweise gehen von ihr die Bahnen der Photoelektronen, bei harten Röntgenstrahlen auch die kurzen Bahnen der Comptonelektronen aus.

1) Zusammenstellung der Literatur z. B. bei Marx, Handbuch der Radiologie, Bd. 5.

2) C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. A 104. S. 1 u. 192. 1922.

Es muß demnach eine sehr einfache Beziehung bestehen zwischen der durch Röntgenstrahlen (indirekt) bewirkten Ionisierung und der direkt durch primäre Kathodenstrahlen hervorgerufenen, eine Beziehung, auf die zuerst Holthusen<sup>1)</sup> hingewiesen hat und die nach dem vorstehenden unmittelbar einleuchtend ist. Es muß nämlich die bei der Absorption eines Röntgenquants  $h\nu$  in der Luft gebildete Anzahl  $S$  von Ionenpaaren gleich sein der von einem Kathodenstrahlelektron erzeugten, wenn dessen Geschwindigkeit  $v$  die Beziehung

$$\frac{1}{2} m v^2 = h \nu$$

erfüllt. Setzen wir

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{S} \cdot h \nu = \varepsilon$$

wobei also  $\varepsilon$  die im Mittel zur Erzeugung je eines Ionenpaares verbrauchte Energie bedeutet, so können wir unsere Behauptung auch so formulieren, daß diese Größe  $\varepsilon$  die gleiche sein muß für Röntgen- und Kathodenstrahlen. Die Gleichheit kann zunächst allerdings nur für den Fall behauptet werden, daß Frequenz und Geschwindigkeit der Strahlen einander durch die obige lichtelektrische Gleichung zugeordnet sind; eine Einschränkung, die wir jedoch später fallen lassen können.

Holthusen hat auf Grund dieses Gedankenganges versucht, aus Beobachtungsdaten für Kathodenstrahlen Zahlen abzuleiten, welche eine Berechnung der Energie von Röntgenstrahlen aus gemessener Ionisierung ermöglichen sollen. Es ist dies in leicht ersichtlicher Weise auszuführen, wenn die Größe  $S$  (bzw.  $\varepsilon$ ) für Kathodenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit bekannt ist. Holthusen benutzte die von Lenard<sup>2)</sup> angegebenen Zahlenwerte für  $S$ , die wir in der folgenden Tab. 1 für einige Geschwindigkeiten wiedergeben. In der dritten Spalte findet man die daraus berechneten Werte für  $\varepsilon$ , wobei die Energie in üblicher Weise in Volt ausgedrückt ist.

1) H. Holthusen, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstrahlen 26. S. 211. 1919.

2) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen, Heidelberg, Akademie, 1918. Zahlen für  $S$  vgl. dort in Tab. IV, S. 262; aus den dort angegebenen Zahlen sind die obigen für abgerundete kVolt-Zahlen interpoliert.

Tabelle 1

Geschwindigkeit (kVolt)	$S$ (Lenard)	$\varepsilon$ (Volt/Ionenpaar)
5	6 + 1	715
10	18 + 1	525
20	71	282
30	130	230
40	200	200
50	280	179
60	370	162

Übertragen auf Röntgenstrahlen würden diese Zahlen erwarten lassen, daß beim Vergleich von Strahlen verschiedener Frequenz die Ionisierung durchaus kein richtiges Maß der Energie ist, daß vielmehr mit abnehmender Frequenz ein immer größer werdender Energiebetrag zur Erzielung gleicher Ionisierung erforderlich ist.

Dieser Folgerung scheinen nun experimentelle Untersuchungen an Röntgenstrahlen, über die ich kürzlich in dieser Zeitschrift ausführlich berichtet habe<sup>1)</sup>, völlig zu widersprechen. Diese Messungen haben ergeben, daß

1.  $\varepsilon$  von der Frequenz der Röntgenstrahlen unabhängig und
2. dem Betrage nach

$$\varepsilon = 35 \pm 5 \text{ Volt/Ionenpaar}$$

anzunehmen ist. Die Untersuchung bezog sich allerdings nur auf ein beschränktes Frequenzintervall, dem, nach der lichtelektrischen Gleichung, Kathodenstrahlgeschwindigkeiten von etwa 7 bis 22 kVolt entsprechen.

Es entsteht die Frage, ob die große Diskrepanz zwischen dem Ergebnis meiner Messungen und den berechneten Zahlen der Tab. 1 zu erklären ist. Daß und wie dies möglich ist, soll in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden.

## 2. Allgemeine Betrachtungen über die von einem Kathodenstrahlelektron insgesamt erzeugte Ionenzahl $S$

Wir halten im folgenden durchaus fest an der eingangs beschriebenen Äquivalenz zwischen der Ionisierung durch Röntgen- und Kathodenstrahlen; abzuändern sind die in Tab. 1 aufgeführten Werte für  $S$ .

1) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. 79. S. 97. 1926.

Diese sollen die Zahl der Ionenpaare angeben, die ein Kathodenstrahlelektron auf seinem *ganzen* Wege in Luft bildet; sie sind — abgesehen von sehr kleinen Geschwindigkeiten (s. unten) — bisher direkt noch nicht gemessen worden. Experimentell bestimmt ist nur die auf einem relativ zur Gesamtlänge sehr kurzen *Teil* der Bahn gebildete Ionenzahl (in der Lenardschen Bezeichnungsweise die „differentielle Sekundärstrahlung“), die, bezogen auf 1 cm Strahlänge in Luft von normalem Druck, im Anschluß an Lenard mit  $s$  bezeichnet werden soll.

Ist  $s$  für verschiedene Kathodenstrahlgeschwindigkeiten bekannt, so kann daraus  $S$  berechnet werden, wenn außerdem

1. die mittlere Bahnlänge eines Kathodenstrahlelektrons in Luft und

2. die Geschwindigkeit in jedem Punkte dieser Bahn bekannt sind.

Lenard geht nun von der Annahme aus, daß die Bahnlänge im wesentlichen durch die *Absorption*, wie er sie auf Seite 31 seines Buches definiert, bestimmt sei; es ergibt sich dann, daß in erster Näherung die Geschwindigkeit längs der Bahn als konstant betrachtet werden kann. Im Bereich mittlerer Geschwindigkeiten soll nämlich die Wahrscheinlichkeit plötzlicher Absorption gegenüber den allmählich erfolgenden Geschwindigkeitsverlusten so groß sein, daß die letzteren in der Energiebilanz nur eine sehr untergeordnete Rolle spielen. Durch sie ist jedoch eine größte mögliche Bahnlänge  $R$  festgelegt dadurch, daß am Ende die Geschwindigkeit auf den Wert 0 reduziert ist. Weitaus die meisten aller Elektronen scheiden aber bereits viel früher aus dem Strahle aus.

Bezeichnet man mit  $\alpha$  den Absorptionskoeffizienten, so ist

$$(1) \quad S = \int_0^R e^{-\alpha x} \cdot s \cdot dx$$

integriert über den wahren Strahlweg  $x$ . Die Größen  $\alpha$  und  $s$  sind noch von der Geschwindigkeit und damit von  $x$  abhängig; da aber, verglichen mit der starken Abnahme des Exponentialausdrucks, die Abhängigkeit nur gering ist, kann man in erster Annäherung  $S = \frac{s}{\alpha}$  setzen. Nach Gleichung(1) sind die oben



benutzten Werte für  $S$  von Lenard aus  $s$  und  $\alpha$  berechnet.

Eine andere Auffassung, wie man sie beispielsweise in der englischen Literatur fast ausschließlich vertreten findet, geht dahin, umgekehrt gerade den Geschwindigkeitsverlusten die ausschlaggebende Rolle zuzuschreiben und die wahre Absorption als einen äußerst seltenen Vorgang zu betrachten. Die letztere, d. h. Geschwindigkeitsverluste von relativ großem Betrage in einer Stufe, hat man sich hiernach wohl als stets mit der Emission von Röntgenstrahlen verbunden zu denken. Entsprechend dem geringen Nutzeffekt der Röntgenstrahlerzeugung wird sie also am Energieumsatz höchstens mit einigen Prom. beteiligt sein.<sup>1)</sup>

Wir können also diese Auffassung kurz folgendermaßen charakterisieren: *Jedes Elektron läuft so weit, bis seine Geschwindigkeit allmählich auf den Wert 0 herabgesetzt ist; da die Geschwindigkeitsverluste überwiegend in kleinen Stufen und annähernd gleichmäßig erfolgen, ist die Strahllänge aller Teilchen von gleicher Anfangsgeschwindigkeit nahe die gleiche. Es existiert also, wie für  $\alpha$ -Strahlen, auch für Kathodenstrahlen eine definierte Reichweite.*

Von anderen Untersuchungsmethoden, aus denen meist nur indirekte Schlußfolgerungen gezogen werden können, unterscheidet sich die Wilsonsche Nebelmethode besonders vorteilhaft dadurch, daß sie ein unmittelbares Abbild der wahren Strahllängen zu geben vermag. Die von Wilson veröffentlichten Aufnahmen (es sei hier besonders auf die Figg. 4 und 5 auf Tafel 17 und 18 der obengenannten Arbeit verwiesen) zeigen nun keineswegs eine Verteilung der Bahnlängen, wie sie bei überwiegendem Einfluß einer wahren Absorption erwartet werden müßte: häufigstes Vorkommen sehr kurzer Bahnen und exponentielle Abnahme der Anzahl mit wachsender Bahnlänge. Man bemerkt vielmehr, innerhalb relativ sehr enger Grenzen, gleiche Strahllängen; die Schwankungen können

1) Der ebenfalls seltene Fall großer Energieübertragung an ein Elektron eines durchquerten Atoms („verzweigte Bahnen“ bei Wilson, a. a. O.) kann hier außer Betracht bleiben, da ein solches schnelles Sekundärelektron seinerseits eine dem Energieverlust des Primärelektrons entsprechende Anzahl Ionen erzeugt.

nach Wilson zwanglos durch die sicher vorhandenen Unterschiede in der Anfangsgeschwindigkeit erklärt werden. Mir scheinen gerade diese Untersuchungen mit Notwendigkeit zur Auffassung vom wesentlichen Einfluß der Geschwindigkeitsverluste und zum Begriff der Reichweite zu führen.

Wenn wir also damit das Vorkommen wahrer Absorptionen im wesentlichen leugnen, so widerspricht unsere Auffassung doch keineswegs der Beobachtungstatsache, daß die Intensität eines Kathodenstrahls (gemessen durch die Anzahl der Elektronen) beim Durchgange durch Materie abnimmt. Man kann diese Schwächung, statt sie der plötzlichen Bremsung eines Teiles der Elektronen zuzuschreiben, auch als eine Wirkung der Diffusion, insbesondere der Rückdiffusion, ansehen. Neuere Beobachtungen von Schonland<sup>1)</sup> legen gerade diese Auffassung vom „Absorptionsvorgang“ sehr nahe. Schonland findet bei parallel auf eine Folie auffallenden Kathodenstrahlen, daß bei hinreichend dünner Folie in dieser überhaupt keine Elektronen festgehalten werden, daß sie vielmehr sämtlich entweder hindurchgehen oder nach Ablenkung um mehr als 90° an der Eintrittsseite wieder erscheinen. Erst in dickeren Folien wird ein Teil festgehalten, der mit weiterer Vergrößerung der Foliendicke zunimmt; es sind dies offenbar diejenigen Elektronen, deren *ganze* Bahn infolge vielfacher Krümmungen im Innern der Folie verläuft.

Mir sind keine Versuche bekannt, welche mit der Anschauung, daß die Intensitätsabnahme allein eine Folge der Diffusion sei, im Widerspruch stehen; auf der anderen Seite findet die dann folgende Auffassung von der Reichweite der Strahlen eine Bestätigung durch die Wilsonschen Versuche. Sie soll deshalb im folgenden zugrunde gelegt werden.

Es ist demgemäß bei der Berechnung von  $S$  aus  $s$  der Exponentialfaktor  $e^{-ax}$  aus (1) zu streichen und

$$(2) \quad S = \int_0^R s(x) dx$$

zu setzen. Wir haben hier  $s = s(x)$  geschrieben, um anzuzeigen, daß es jetzt wesentlich auf die Änderung von  $s$  längs des Strahlweges  $x$  ankommt.

1) B. F. J. Schonland, Proc. Roy. Soc. A 108. S. 187. 1925.

Zur Neuberechnung von  $S$  entnehmen wir Zahlenwerte für  $s$  in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen der kritischen Zusammenstellung bei Bloch<sup>1)</sup>, wie sie auch im Lenardschen Buche angegeben sind. Zu beachten ist, daß gerade im Bereich mittlerer Geschwindigkeiten, für den wir uns hier interessieren, aus den vorhandenen Messungen keine ganz zuverlässigen Zahlen zu erhalten sind, wie im einzelnen aus der genannten Arbeit von Bloch zu ersehen ist.

Es ist weiter erforderlich die Kenntnis der Reichweite  $R$  der Kathodenstrahlen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit oder, was auf dasselbe herauskommt, die Kenntnis des Geschwindigkeitsverlaufes in jedem Punkte der Bahn eines anfangs schnellen Elektrons. Wir müssen im folgenden hierauf zunächst näher eingehen.

### 3. Ermittlung der Reichweite $R$ in Luft

Beim Studium des vorhandenen Beobachtungsmaterials gewinnt man zunächst ein wenig einheitliches Bild und erst eine kritische Sichtung ermöglicht es, hieraus einigermaßen zuverlässige Zahlenwerte abzuleiten. Für die Diskussion erweist es sich als nützlich, von einer theoretischen Darstellung auszugehen; sie ermöglicht eine bequeme und übersichtliche Einordnung.

Nach der bekannten Thomson-Whiddingtonschen Gleichung ist die Geschwindigkeit eines Elektrons von der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  nach Durchlaufen einer Schichtdicke  $x$  auf den Betrag  $v_x$  heruntergegangen, der durch

$$(3) \quad v_x^4 = v_0^4 - b \cdot x$$

bestimmt ist. Darin ist in erster Näherung  $b$  eine Materialkonstante und der Dichte proportional. Die Verfeinerung der Theorie durch Bohr<sup>2)</sup> führte zu dem gleichen Gesetz, jedoch mit dem Zusatz, daß

$$(4) \quad b = \frac{16 \pi e^4 N}{m^2} \sum_i \log \left( \frac{1,123 m v^3}{4 \pi e^3 v_i} \right) = b_0 \cdot \log (b_1 v^3)$$

zu setzen ist. Es bedeuten darin  $e$  und  $m$  Ladung und Masse des Elektrons,  $N$  die Anzahl der Atome pro  $\text{cm}^3$  und  $v_i$  im wesentlichen die Umlauffrequenzen der Atomelektronen. Der

1) S. Bloch, Ann. d. Phys. 38. S 559. 1912.

2) N. Bohr, Phil. Mag. 25. S. 10. 1913 und 30. S. 581. 1915.

letzteren wegen ist für  $b$  keine strenge Massenproportionalität zu erwarten; außerdem bewirkt der logarithmische Faktor eine geringe, bei kleinen Geschwindigkeiten stärker hervortretende Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Aus (3) und (4) erhält man leicht die Reichweite  $R$ , nämlich mit  $v_x = 0$ . Man bestimmt sie am einfachsten graphisch aus der Kurve der Geschwindigkeitsabnahme.

Wir stellen zunächst in Fig. 1 den Verlauf der Größe  $b$  in Abhängigkeit von der Voltgeschwindigkeit  $V$  dar, wie er sich nach (4) berechnet, ferner in Fig. 2 die hieraus ermittelten Reichweiten; beide Kurven beziehen sich auf Luft von Atmosphärendruck. Es ist dabei von den beiden Konstanten  $b_0$  und  $b_1$  der Gleichung (4)  $b_0$  so angenommen worden, daß sich die Kurven der Figg. 1 und 2 den vorhandenen Beobachtungen möglichst gut anpassen; dies erfordert

$$b_0 = 7,3 \cdot 10^{38}$$

Der Wert ist kleiner als der aus der theoretischen Formel (4) sich ergebende ( $12,6 \cdot 10^{38}$ ), der jedoch ersichtlich den Beobachtungen nicht gerecht wird.<sup>1)</sup> Die Konstante  $b_1$  ist maßgebend für die geringe Krümmung der Kurve, wie sie sich in Fig. 1 zeigt, jedoch kann sie, da ihr Einfluß gering ist und die Beobachtungen an Kathodenstrahlen wenig genau sind, aus diesen selbst nicht bestimmt werden. Theoretisch ist sie aus den Frequenzen  $\nu$ , bzw. einem Mittelwert  $\bar{\nu}$  derselben zu berechnen; einen solchen hat Bohr (in der zweiten der genannten Arbeiten) aus Messungen über den Geschwindigkeitsverlust von  $\alpha$ -Strahlen in Luft zu rund  $\bar{\nu} = 4,6 \cdot 10^{16}$  abgeleitet. Daraus ergibt sich

$$b_1 = 7 \cdot 10^{-27}$$

und dieser Wert ist den Kurvendarstellungen zugrunde gelegt.

Zur Prüfung der Rechnung müssen in erster Linie Messungen herangezogen werden, welche direkt an Luft aus-

1) Es steht dies scheinbar im Widerspruch mit einer Angabe bei H. A. Kramers, *Phil. Mag.* 46. S. 836. 1923, der Übereinstimmung des theoretischen Zahlenwertes mit Messungen von Terrill findet. Jedoch ist zu beachten, daß die letzteren mit Kathodenstrahlen von 25 bis 50 kVolt Geschwindigkeit ausgeführt wurden, während Kramers die Berechnung für  $V = 10$  kVolt ausführt. Tatsächlich ist also auch hier die Differenz vorhanden.

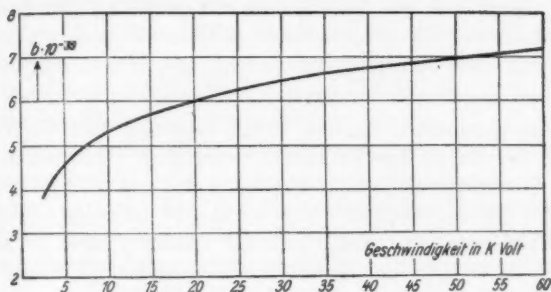


Fig. 1. Berechneter Verlauf des Faktors  $b$  aus dem Thomson-Whiddingtonschen Gesetz

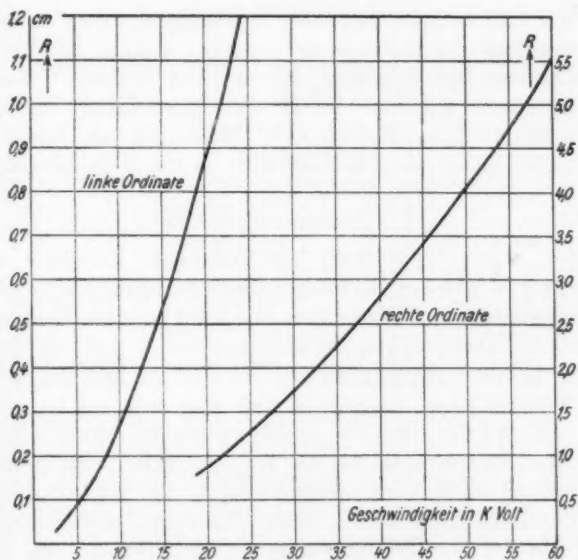


Fig. 2. Berechnete Werte für die Reichweiten in Luft

geführt sind, und zwar sind hier vor allem die Bestimmungen der Reichweite anzuführen, die C. T. R. Wilson durch Ausmessen der Bahnlängen in seinen Nebelaufnahmen vorgenommen

hat.<sup>1)</sup> Innerhalb der erreichbaren Genauigkeit findet Wilson für die Reichweite die Beziehung erfüllt, daß

$$\sqrt{R} = \frac{V}{21000} \quad (V \text{ in Volt})$$

ist. Am genauesten dürften dabei bestimmt sein die Bahnlängen der durch Ag-K-Strahlung erzeugten Photoelektronen, deren Geschwindigkeit zwischen etwa 19 und 24 kVolt liegt. Für eine Geschwindigkeit von 21 kVolt gibt die obige Gleichung eine Reichweite von 1 cm, während unsere Kurve in Fig. 2 hierfür  $R = 0,96$  cm liefert. Photoelektronen von Cu-K-Strahlung, deren Geschwindigkeiten zwischen etwa 4,8 und 8,6 kVolt liegen, haben nach Wilson Bahnlängen zwischen 0,6 und 1,7 mm gegenüber Reichweiten zwischen 0,7 und 2,1 mm nach unserer Berechnung. Die Übereinstimmung ist also hier weniger gut, aber befriedigend, wenn man die Schwierigkeit der Ausmessung so kurzer Bahnen und die Inhomogenität der Strahlung bei Wilson bedenkt. Zudem finden unsere größeren Werte eine Bestätigung bei noch kleineren Geschwindigkeiten durch Messungen von Anslow<sup>2)</sup>, die — bis hinauf zu etwa 2000 Volt — für  $R$  die Beziehung

$$\sqrt{R} = \frac{V}{15900} \quad (V \text{ in Volt})$$

ergeben haben. Für 2000 Volt-Elektronen berechnet man hieraus  $R = 0,16$  mm, in völliger Übereinstimmung mit unserer Kurvendarstellung. Dieser gute Anschluß an die Messungen gerade bei kleinsten Geschwindigkeiten zeigt, daß wir für  $b_1$  in der Größenordnung zweifellos das richtige getroffen haben.

Weitere Beobachtungen an Luft sind noch von Lenard<sup>3)</sup> und von Whiddington<sup>4)</sup> ausgeführt worden; diese weichen von allen übrigen erheblich ab (Lenard findet eine größere, Whiddington eine kleinere Reichweite). Bei Whiddington, der die Größe  $b$  bestimmte, dürfte dies darauf zurückzuführen sein, daß der Geschwindigkeitsverlust im Al-Fenster der Ent-

1) C. T. R. Wilson, a. a. O.

2) G. A. Anslow, Phys. Rev. 25. S. 484. 1925.

3) P. Lenard, Ann. d. Phys. u. Ch. 56. S. 261. 1895, sowie in seinem Buche S. 70.

4) R. Whiddington, Proc. Roy. Soc. A 86. S. 360. 1912.

ladungsrohre mitgemessen und hierfür nur eine recht unsicher ermittelte Korrektur angebracht wurde. Bei Lenards Beobachtungen wurde die Strahlgeschwindigkeit nur durch eine Funkenstrecke bestimmt; da  $R$  proportional  $v^4$  ist, ist der abweichende Wert wohl verständlich.

Zur weiteren Prüfung unserer Kurven können Beobachtungen über die Geschwindigkeitsverluste in Aluminium herangezogen werden. Bei der Umrechnung dieser Messungen auf Luft ist zu beachten, daß, wie wir bereits hervorgehoben haben, keine strenge Proportionalität mit der Dichte zu erwarten ist. Bohr hat in seiner obengenannten Arbeit aus Messungen an  $\alpha$ -Strahlen abgeleitet, daß im Falle des Al für  $\bar{v}$  ein etwa doppelt so großer Wert als für Luft anzunehmen ist. Es müssen also die massenproportional umgerechneten Al-Werte noch um den konstanten Betrag von  $b_0 \cdot \log 2 = 5 \cdot 10^{38}$  erhöht werden.

Werte für die Größe  $b$ , wie sie den vorliegenden Messungen von v. Baeyer<sup>1)</sup>, Whiddington<sup>2)</sup>, Terrill<sup>3)</sup>, Klemperer<sup>4)</sup> und Becker<sup>5)</sup> zu entnehmen sind, sind in der folgenden Tab. 2

Tabelle 2

Beobachter	Geschwindigkeitsbereich (kVolt)	$b \cdot 10^{-39}$ umgerechnet auf Luft	$b \cdot 10^{-39}$ nach Fig. 1
v. Baeyer	36 bis 120	6,8	6,6 bis (8,5)
Becker	30 „ 80	5,6	6,5 „ (7,6)
Terrill	25 „ 50	7,2	6,3 „ 6,9
Whiddington	8 „ 20	4,1	5,1 „ 6,0
Klemperer	6 „ 13	3,6	4,8 „ 5,6

aufgeführt, in der angegebenen Weise auf Luft umgerechnet. Jede einzelne Meßreihe ist nicht so genau, daß der systematische Gang von  $b$  mit  $v$  deutlich in Erscheinung tritt; es sind deshalb in der Tabelle nur Mittelwerte notiert. Diesen sind in der vierten Spalte die aus unserer Fig. 1 abzulesenden Werte gegenübergestellt.

1) O. v. Baeyer, Phys. Ztschr. 13. S. 485. 1912.

2) R. Whiddington, a. a. O.

3) H. M. Terrill, Phys. Rev. 22. S. 101. 1923.

4) O. Klemperer, Ztschr. f. Phys. 34. S. 532. 1925.

5) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 209. 1925.

Bei großen Geschwindigkeiten zeigt sich eine recht befriedigende Übereinstimmung unserer berechneten Kurve mit den Messungen von v. Baeyer, Becker und Terrill, besonders, wenn man diese zu einem gemeinsamen Mittelwert zusammenfaßt. Auffallend ist zunächst die starke Differenz bei den kleinen Geschwindigkeiten, die scheinbar eine stärkere Abnahme von  $\delta$  mit der Geschwindigkeit verlangt. Abgesehen davon, daß eine solche (kleinere Werte für  $\delta$  bedeuten größere Reichweite) zum Widerspruch mit den oben besprochenen Ergebnissen von Wilson und Anslow führen würde, ist die hier erscheinende Abweichung dem Sinne nach auch wohl verständlich. Es wird nämlich bei den Messungen der häufigste Geschwindigkeitsverlust bestimmt, der kleiner ist als der von uns betrachtete mittlere, wie Bohr (a. a. O.) theoretisch gezeigt hat und wie auch die Kurven bei Klemperer erkennen lassen. Wie groß dieser Unterschied zahlenmäßig ist, läßt sich den Messungen nicht entnehmen, da die magnetischen Spektren der durch die Al-Folie hindurchgegangenen Strahlen aus verschiedenen Gründen die wahre Geschwindigkeitsverteilung nicht richtig wiedergeben und da auch infolge Diffusion die wahren Strahlwege verschieden lang sind. Bei größeren Primär Geschwindigkeiten arbeitet man im allgemeinen mit relativ geringeren Geschwindigkeitsverlusten, so daß dort diese Einflüsse weniger bedeutungsvoll sind.

Direkte Bestimmungen der Reichweite in Al hat Schonland (a. a. O.) ausgeführt; er zeigt, daß sich seine Ergebnisse hinsichtlich der Abhängigkeit von der Geschwindigkeit durch die Bohrsche theoretische Formel darstellen lassen, mit befriedigender Übereinstimmung. Die von ihm ermittelten Zahlenwerte liegen jedoch, massenproportional umgerechnet, im Mittel um etwa 25 Proz. tiefer als die von uns berechneten, während sie nach dem obengesagten sogar höher liegen sollten. Es werden aber auch bei Schonland nicht die wahren Strahlängen, sondern ihre Projektion auf die Primärstrahlrichtung gemessen. Gerade aus diesem Grunde ist die Bestimmung aus den Geschwindigkeitsverlusten vorzuziehen: dort können dünne Schichten benutzt werden, bei denen die Diffusion noch nicht erheblich ist, während Schonland die maximal noch durchlässige Dicke bestimmt, in der der Strahl bereits völlig diffus



geworden ist. Seine Werte sind also offenbar mit einem „Umwegfaktor“ zu multiplizieren; dieser ist nach Lenard nahe unabhängig von der Geschwindigkeit und für Al bei völlig diffus auffallender Strahlung etwa  $= 1,8$ . Da bei Schonland die Strahlen parallel auftreffen, muß der Faktor dort kleiner angenommen werden. Man erhält eine befriedigende Übereinstimmung, wenn man ihn zu etwa 1,5 wählt; dieser Wert ist nach dem Vorstehenden durchaus plausibel. Immerhin bleibt in diesem Falle eine erhebliche Unsicherheit im Zahlenwert bestehen; wichtiger ist, daß die Messungen von Schonland den *Verlauf* der Kurve bestätigen.

Zusammenfassend wird man sagen können, daß die oben durchgeführte Berechnung der Reichweiten in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in befriedigender Übereinstimmung mit den vorliegenden Beobachtungen steht und daß sie, soweit die verschiedenen Beobachtungen untereinander differieren, eine gut begründete Mittelung darstellt.

#### 4. Neuberechnung der insgesamt von einem Elektron gebildeten Ionenzahl $S$

Die Kenntnis von  $s$  und  $R$  in Abhängigkeit von der Strahlgeschwindigkeit ermöglicht es jetzt, auf dem vorgeschlagenen neuen Wege die von einem Kathodenstrahlelektron insgesamt auf seiner ganzen Bahn gebildete Anzahl  $S$  von Ionenpaaren — gemäß der obigen Gleichung (2) — zu berechnen. Man verfährt dabei am einfachsten graphisch, indem man die pro Zentimeter Strahllänge gebildete Ionenzahl  $s$  in Abhängigkeit von der Reichweite  $R$  aufträgt, wie dies in Fig. 3 geschehen ist. Die gesuchte Größe  $S$  ist dann ersichtlich gegeben durch die Größe der Fläche, welche von der im Punkte der betreffenden Anfangsreichweite errichteten Ordinate sich nach links erstreckt und durch die Kurve und die Koordinatenachsen begrenzt wird. In der Figur sind verschiedene derartige Ordinaten eingetragen für Reichweiten, welche nach Fig. 2 den beigeschriebenen Anfangsgeschwindigkeiten entsprechen. Die Größe der zwischen je zweien dieser Ordinaten liegenden Flächenstücke ist ebenfalls eingetragen; die Zahlen geben die auf dem betreffenden Teile der Bahn gebildete Anzahl von Ionenpaaren an. Zu bemerken ist, daß die Kurvendarstellung

nur bis zu einer kleinsten Geschwindigkeit von 2,5 kVolt ausgeführt ist; für tiefere Spannungen würde die Berechnung zu unsicher werden. Es ist dann für die auf diesem letzten Teile der Bahn gebildete Ionenzahl versuchsweise die gleiche Zahl eingesetzt, wie sie sich aus dem Flächenstück zwischen den Geschwindigkeiten 2,5 und 5,0 kVolt ergibt. Der Größenordnung nach wird dieser Wert durch Messungen von Anslow (a. a. O.) bestätigt. In dieser Arbeit wurde für langsame

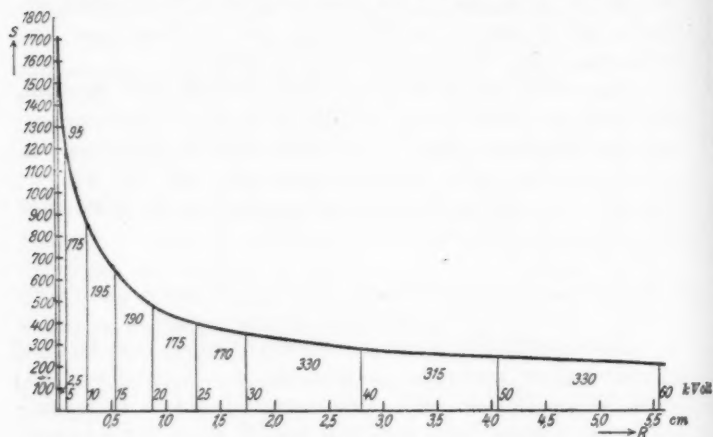


Fig. 3. Zur Berechnung der Gesamtionisierung  $S$  aus der differentiellen  $s$  und der Reichweite  $R$

Kathodenstrahlen, welche durch einen engen Kanal ohne Fenster aus dem Entladungsraum in die Ionisierungskammer (Luftdruck bis zu einigen mm Hg) traten, die Gesamtionisierung direkt bestimmt. Bei 1000 Volt-Elektronen wurde sie zu rund 41 Ionenpaare/Elektron gefunden, ein Wert, der nach Anslow noch um etwa 7 Proz. zu erhöhen ist, da ein Teil der Ionen innerhalb des Kanals verloren geht. Da bei weiter steigender Geschwindigkeit die gemessene Ionenzahl nur noch sehr wenig zunimmt (bei 2225 Volt wurden 51,4 Ionenpaare/Elektron gefunden), ist zu vermuten, daß der erwähnte Fehler sich hier in steigendem Maße geltend macht, zumal bei höheren Geschwindigkeiten auch die Druckdifferenz zwischen

Entladungs- und Ionisierungsraum größer gewählt werden mußte. Ich glaube deshalb, daß für Elektronen von 2500 Volt Geschwindigkeit der oben angenommene Wert von  $s = 95$  eher zutreffend ist als ein aus den Messungen von Anslow extrapolierter, für den man etwa 60 bis 65 erhält.

Durch fortschreitende Summation sind jetzt den in Fig. 3 angegebenen Zahlen die Werte für  $s$  für jede Anfangsgeschwindigkeit leicht zu entnehmen; sie sind in Tab. 3 zusammengestellt. Wie bereits oben, berechnen wir hieraus weiter die im Mittel zur Erzeugung je eines Ionenpaares erforderliche Energie  $\epsilon$ .<sup>1)</sup>

Man bemerkt, daß sich hier in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis meiner Messungen an Röntgenstrahlen  $\epsilon$  als unabhängig von der Geschwindigkeit ergibt; die kleinen

Tabelle 3

Geschwindigkeit (kVolt)	Reichweite (cm)	$s$ (cm <sup>-1</sup> )	$s$ berechnet aus der Reichweite	$\epsilon$ (Volt/Ionenpaar)
2,5	0,025	1700	(95)	(26,3)
5	0,095	1260	190	26,3
10	0,27	860	365	27,4
15	0,54	640	560	26,8
20	0,88	480	750	26,6
25	1,28	390	925	27,0
30	1,74	340	1095	27,4
40	2,80	275	1425	28,0
50	4,05	240	1740	28,7
60	5,55	205	2070	29,0

Schwankungen des Wertes, wie sie Tab. 3 zeigt, sind bedeutungslos, da die Grundlagen der Berechnung bei weitem

1) Zahlen von einer dem Wesen nach ähnlichen Bedeutung findet man auch bei Lenard, a. a. O., Tab. 13 auf S. 173, jedoch nicht als Mittelwert längs der ganzen Bahn, sondern differentiell als Energieverlust/Ionenpaar für die jeweilige Geschwindigkeit des Primärelektrons berechnet. Wenn unser Ergebnis richtig ist ( $s$  konstant), sollten aber beide Berechnungsarten zu gleichen Zahlen führen. Die Lenardschen weichen von den unsrigen ab und liegen beträchtlich tiefer, sogar unterhalb der Ionisierungsspannung. Es rührt dies daher, daß Lenard andere Werte für die Geschwindigkeitsverluste zugrunde legt, als ich es auf Grund der oben durchgeführten Sichtung des heute verfügbaren Beobachtungsmaterials getan habe.

nicht so genau sind. Auch die soeben hervorgehobene Unsicherheit des ersten Wertes (2,5 kVolt) ist praktisch belanglos, da hierdurch schon von 10 kVolt aufwärts die Zahlen nicht mehr merklich beeinflußt werden; andererseits würde sich bei anderer Wahl dieses Wertes für kleinere Geschwindigkeiten ein unwahrscheinlich schwankender Verlauf von  $\epsilon$  ergeben.

Dem Zahlenwerte nach erhält man aus dieser Rechnung  $\epsilon$  zu etwa 27 bis 28 Volt/Ionenpaar. Meine Messungen an Röntgenstrahlen ergaben  $\epsilon = 35 \pm 5$  Volt/Ionenpaar, mit der angegebenen, immerhin nicht unbeträchtlichen Unsicherheit. Da auch der hier berechnete Wert leicht noch mit einem Fehler gleicher Größenordnung behaftet sein kann, darf man sagen, daß auch im absoluten Werte die Übereinstimmung so gut ist, wie sie nur erwartet werden kann. Unsere Rechnung findet eine weitere Bestätigung durch einen von Wilson (a. a. O.) für  $V = 25$  kVolt ermittelten Wert  $\epsilon = 26$  Volt/Ionenpaar, den er durch Auszählung der Nebeltröpfchen längs der Bahn eines Elektrons erhielt. Wie groß allerdings die Genauigkeit dieser Zahl ist, vermag ich nicht zu beurteilen; wenig sicher ist wohl jedenfalls die Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit des betreffenden Elektrons. Wilson gibt an, daß insgesamt an sechs Bahnen eine derartige Auszählung möglich war, wobei die Einzelwerte bis 20 Proz. vom Mittel abweichen.

Die noch verbleibende Unsicherheit fällt nicht ins Gewicht, wenn wir mit den hier berechneten Zahlen die der Tab. 1 vergleichen; diese Gegenüberstellung scheint mir ein augenfälliges Argument dafür zu liefern, daß der hier eingeschlagene Weg zur Ermittlung der Ionisierung der richtige ist, um so mehr als wir jetzt, ohne an den Grundvorstellungen etwas ändern zu müssen, ein widerspruchsfreies Bild vom Vorgange der Ionisierung durch Röntgen- und Kathodenstrahlen erhalten.

Die Berechnungen sind hier über den Bereich meiner Messungen hinausgeführt. Die Tatsache, daß sich auch weiterhin ein konstanter Wert für  $\epsilon$  ergibt, scheint zunächst im Widerspruch mit Messungen von Grebe und Kriegesmann<sup>1)</sup> zu

1) L. Grebe und L. Kriegesmann, Ztschr. f. Phys. 28. S. 91. 1924; L. Kriegesmann, ebenda 32. S. 542. 1925. — *Zusatz bei der Korrektur:* Vgl. auch die inzwischen veröffentlichte Untersuchung von

stehen, die bei Röntgenstrahlen im Bereiche von etwa 0,5 bis 0,15 Å.-E. mit abnehmender Wellenlänge eine starke Zunahme von  $\epsilon$  fanden; es entsprechen diesen Wellenlängen Kathodenstrahl-Geschwindigkeiten zwischen 25 und 80 kVolt. Bei so harten Röntgenstrahlen ist aber, wie Grebe und Kriegesmann auch besonders betonen, die Ermittlung der wahren Werte deshalb besonders unsicher, weil sich nach unserer heutigen Kenntnis nicht angeben läßt, welcher Bruchteil der Röntgenstrahlen in einem begrenzten Luftvolumen absorbiert, d. h. in Energie von Elektronenstrahlen umgesetzt wird. Die Rückstoßelektronen des Comptoneffektes sind hier stark beteiligt, aber es läßt sich bisher nicht berechnen, in welchem Maße.

Es scheint mir vorteilhaft zu sein, jetzt einen anderen Weg einzuschlagen. Da sich die hier durchgeführte Berechnung in einem beschränkten Spannungs- bzw. Frequenzintervall gut bewährt, wird man sie auch darüber hinaus anwenden können. Das einfache Resultat, daß  $\epsilon$  unabhängig von der Geschwindigkeit der Elektronen ist, erlaubt uns, im Falle harter Röntgenstrahlen die Photoelektronen und die Rückstoßelektronen einheitlich zu behandeln: die gemessene Ionenzahl ist stets ein Maß für denjenigen Teil der Energie der Röntgenstrahlung, der in kinetische Energie bewegter Elektronen umgesetzt ist; aus ihr kann also stets dieser Teil berechnet werden. In der medizinischen Praxis beispielsweise ist auch gerade diese Größe von Interesse, denn es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß eben der in Elektronenstrahlung umgesetzte Teil der Röntgenstrahlung, und nur dieser, biologisch wirksam ist.

Es ist nun auf diesem Wege möglich, aus Energie-Ionisierungsmessungen den bisher unbekannten Absorptionskoeffizienten für harte Röntgenstrahlen in leichten Gasen zu ermitteln. Nimmt man weiter an, daß die normale Absorption durch lichtelektrischen Effekt auch in diesem Gebiete proportional

---

H. Kircher und W. Schmitz, Ztschr. f. Phys. 36. S. 484. 1926. Der Absolutwert wird dort zu  $\epsilon = 21$  Volt/Ionenpaar bestimmt; es ist schwer zu beurteilen, worauf diese starke Abweichung von dem meinigen zurückzuführen ist. Sie bleibt jedoch noch unerheblich gegenüber den Zahlen der Tab. 1.

der dritten Potenz der Wellenlänge ist, so läßt sich diese berechnen und aus der Differenz der Betrag der beim Compton-effekt umgesetzten Energie bestimmen.

#### Zusammenfassung

Da die Ionisierungswirkung der Röntgenstrahlen eine indirekte, und zwar eine Wirkung der bei der Absorption gebildeten Photoelektronen ist, ist zu erwarten, daß Röntgen- und Kathodenstrahlen bei gleicher Energie auch gleiche Ionisierung ergeben, wenn ihre Frequenz bzw. Geschwindigkeit durch die lichtelektrische Gleichung  $h\nu = \frac{1}{2}mv^2$  miteinander verknüpft sind. Die Ionisierungswirkung von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlängen ist vom Verf. in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit eingehend untersucht worden; für Kathodenstrahlen ist sie bisher direkt nicht gemessen worden, kann aber aus der experimentell bekannten Ionisierung pro Zentimeter Strahlänge berechnet werden, wenn außerdem die mittlere Weglänge der Elektronen in Luft gegeben ist.

Letztere ist im wesentlichen durch den Absorptionskoeffizienten bestimmt, wenn man nach Lenard den Absorptionsvorgang als eine plötzliche Reduktion der Strahlgeschwindigkeit auf einen nahe an Null liegenden Wert ansieht. Die hiernach berechneten Werte für die Ionisierungswirkung stehen jedoch in der Größenordnung sowohl als hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in völligem Widerspruch mit den an Röntgenstrahlen erhaltenen. Demgegenüber wird gezeigt, daß man zu einer guten Übereinstimmung gelangt, wenn man von der Annahme ausgeht, daß die Absorption eine Wirkung der Diffusion ist und daß also die Weglänge der Kathodenstrahlelektronen durch die allmählich erfolgenden Geschwindigkeitsverluste („Reichweite“) begrenzt wird.

München, Physikal. Inst. der Techn. Hochschule, März 1926.

(Eingegangen 26. März 1926)

## 5. Gittergeister bei unperiodischen Teilungsfehlern; von Eberhard Buchwald

1. Gittergeister, die von periodischen Teilungsfehlern herühren, als bekannteste unter ihnen die nach Rowland benannten, sind vielfach untersucht worden. Daß sich auch diesem Probleme noch neue Seiten abgewinnen lassen, zeigen jüngere Arbeiten wie die von Sparrow<sup>1)</sup>, der nach der Cornuschen Methode eine systematische Übersicht über die unvollkommenen Gitter gibt, und die von Minnaert.<sup>2)</sup> Sparrow behandelt auch kurz unperiodische Fehler<sup>3)</sup>: sie erzeugen einen kontinuierlichen Untergrund im Beugungsbilde, sowohl die zufälligen Abweichungen in der Furchenlage, die unsystematische Phasenfehler in das Beugungsphänomen hineinragen, als die Zufälligkeiten der Furchenform mit ihren unsystematischen Amplitudenfehlern.

Nicht betont wird von Sparrow, daß der Untergrund, den wir das „Opaleszenzfeld“ nennen, in seiner idealen Intensitätsverteilung — im ersten Falle ansteigend mit wachsenden Beugungswinkeln, im zweiten von konstanter Intensität — nicht zu beobachten ist. Das wäre nur zu erwarten, wenn die Gitterfurchen oder -spalte die sehr unwahrscheinliche Verteilung *genau* nach dem Fehlergesetz aufwiesen. Im allgemeinen aber sorgen die Abweichungen von dieser Verteilung dafür, daß auch im Opaleszenzfeld Abweichungen von der Idealintensität, „Intensitätsschwankungen“, auftreten, denen zufolge es als Aneinanderreihung hellerer und dunklerer Streifen, „granuliert“ oder „kanneliert“ erscheint. Die Größe der Intensitätsschwankungen läßt sich berechnen<sup>4)</sup> und erweist sich als beträchtlich:

1) C. M. Sparrow, *Astrophys. Journ.* **49**. S. 65. 1919.

2) M. Minnaert, *Versl. Amsterdam* **30**. S. 257. 1921.

3) a. a. O. S. 82f., 87f.

4) E. Buchwald, *Phys. Ztschr.* **26**. S. 672. 1925. Behandelt wird der Fall der unsystematischen Fehler der Spaltlage.

das mittlere Schwankungsquadrat ist im allgemeinen annähernd gleich dem Quadrate der mittleren Intensität an der betreffenden Stelle. Die Schwankungen sind an einem absichtlich fehlerhaft geritzten Gitter auch bequem zu beobachten.

Ist das Gitter verhältnismäßig gut, so treten nur die hellsten Stellen des Untergrunds hervor und wirken als „Geister“. Die Möglichkeit derartiger Geister, die ihr Dasein also nicht den obengenannten periodischen, sondern unperiodischen Gitterfehlern verdanken, scheint bisher kaum beachtet zu sein.<sup>1)</sup> Wir versuchen im folgenden die Fragen zu beantworten: *Wie groß ist bei einem gegebenen Gitter die Wahrscheinlichkeit, an einer bestimmten Stelle des Beugungsbildes einen Geist anzutreffen? Wieviel Geister von gegebener Mindestintensität sind in einem bestimmten Spektralbereiche zu erwarten? Wie weit ist ihre Verteilung durch den Zufall, wie weit durch Symmetrieverhältnisse bestimmt?*

2. Das Gitter habe  $N$  Spalte und die Gitterkonstante  $g$ . Die Spalte seien unendlich schmal, eine Voraussetzung, von der wir uns nachträglich leicht frei machen können<sup>2)</sup>, und ihre Lage sei fehlerhaft, insofern als der 1., 2., ...  $N$ -te Spalt statt an der „richtigen“ Stelle  $g, 2g \dots Ng$  bei  $g + \xi_1, 2g + \xi_2 \dots Ng + \xi_n$  liege.

Fällt auf dieses Gitter Licht von der Wellenlänge  $\lambda$  senkrecht auf, so ist nach einer bekannten Formel der klassischen Beugungstheorie<sup>3)</sup> die unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Einfallrichtung = Gitternormale abgebeugte Intensität durch

1) In Glazebrooks Dictionary of Applied Physics IV. London 1923, findet sich in J. A. Andersons Beitrag auf S. 139 ein Hinweis auf sie. „In general, therefore, the intensity curve shows a succession of maxima and minima, which frequently appear like a group of fine lines between the spectral line and its first ghost.“ Ich vermag diese Angabe mit den Ergebnissen dieser Arbeit nicht in Einklang zu bringen. Ebenso scheint mir die vorangehende Bemerkung über die ideale Intensitätsverteilung im Opaleszenzfeld mit Sparrow, dessen Resultat wir bestätigen und verallgemeinern werden, in Widerspruch zu stehen: „If the errors were perfectly random in distribution and size, the intensity of the diffused light would be given by a probability curve centered on the bright line in question.“

2) Vgl. Anm. 1 auf S. 293.

3) Vgl. z. B. Winkelmanns Handbuch 6 (Optik). S. 1078.



$$(1) \quad J = \sum_n^{1..N} \sum_m^{1..N} e^{i\mu(n-m)g} e^{i\mu(\xi_n - \xi_m)}$$

gegeben, wo zur Abkürzung

$$(2) \quad \mu = \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}$$

gesetzt ist.

Von diesem  $J$ , das von der speziellen  $\xi$ -Konstellation abhängt, gehen wir zu einem hiervon unabhängigen Mittelwert  $J$  über, indem wir jedes  $J$  mit der Wahrscheinlichkeit gerade seiner  $\xi$ -Konstellation multiplizieren und dann integrieren. Setzen wir als Wahrscheinlichkeit der Verschiebung

$$\xi_p \dots \xi_p + d\xi_p$$

des  $p$ -ten Spaltes nach dem Fehlergesetz an:

$$(3) \quad dw_p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p \quad (h \text{ das „Präzisionsmaß“})$$

und als Wahrscheinlichkeit der Kombination

$$\xi_1 \dots \xi_1 + d\xi_1, \dots, \xi_N + d\xi_N$$

unter der Annahme der Unabhängigkeit aller  $\xi$  voneinander nach dem Multiplikationsgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$(4) \quad dw = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N e^{-h^2 \sum_p^{1..N} \xi_p^2} d\xi_1 \dots d\xi_N$$

so wird also

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n^{1..N} \sum_m^{1..N} e^{i\mu(n-m)g} e^{i\mu(\xi_n - \xi_m)} \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N e^{-h^2 \sum_p^{1..N} \xi_p^2} d\xi_1 \dots d\xi_N$$

Die Auswertung dieser Integrale und Summen findet man bei Debye.<sup>1)</sup> Sein Problem, der Einfluß der Wärmebewegung in Kristallen auf die Röntgeninterferenzen, führt naturgemäß auf einen im wesentlichen gleichen Ausdruck. Als Schlussergebnis übernehmen wir in einfacher Umbenennung seine Formel (16) a. a. O.:

$$(5) \quad J = N \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) + e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\sin^2 \frac{N\mu g}{2}}{\sin^2 \frac{\mu g}{2}}$$

1) P. Debye, Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. 15. S. 678. § 2. 1913.

Hier stellt der Quotient der Sinusquadrate im zweiten Gliede das klassische Fraunhofersche Beugungsbild dar. Es erscheint durch den Faktor  $e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}$  um so mehr geschwächt, je geringer die Präzision  $h$  und je größer der in  $\mu$  steckende Beugungswinkel  $\varphi$  ist. Dafür tritt das erste Glied

$$N \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right)$$

auf, der kontinuierliche Untergrund, das Opaleszenzfeld in seiner idealen Intensitätsverteilung.

Um die Übereinstimmung mit Sparrow zu gewinnen, stellen wir fest, daß  $\mu^2/2h^2$  in den praktisch wichtigen Fällen häufig klein gegen 1 ist. Wir legen die Werte des Zahlenbeispiels von Nr. 9 zugrunde. Dort ist als mittlerer Fehler eines Gitterstrichs

$$m = \frac{g}{20}$$

angenommen, woraus mit

$$h = \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad 1)$$

folgt:

$$(6) \quad \frac{1}{2h^2} = m^2 = \frac{g^2}{400}$$

Anderseits wird, wenn wir in die  $q$ -te Ordnung der Interferenz gehen, wo  $q$  im allgemeinen keine ganze Zahl ist ( $q = 1, 2, 3 \dots$  im 1., 2., 3. ... Hauptmaximum, gleich 1,5 in der Mitte zwischen 1. und 2. Hauptmaximum usw.),

$$(7) \quad \mu^2 = \frac{4\pi^2 \sin^2 \varphi}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{q^2 \lambda^2}{g^2}$$

Nach (6) und (7) wird

$$(8) \quad \frac{\mu^2}{2h^2} = \frac{4\pi^2 q^2 m^2}{g^2} = \frac{4\pi^2 q^2}{400}$$

also in der Gegend  $q = 1$  des 1. Hauptmaximums  $\sim 1/10$ . In höheren Ordnungen ist der Wert größer, bei präziseren Gittern kleiner. Brechen wir in solchen Fällen bei der Entwicklung von  $e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}$  nach dem zweiten Gliede ab, so ist die Intensitätsverteilung im Opaleszenzfeld durch  $N\mu^2/2h^2$  bestimmt, d. h. nach

1) Vgl. z. B. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig und Berlin 1908. S. 269.

(8): sie ist proportional dem Quadrate des mittleren Fehlers und dem Quadrate der Interferenzordnung. Das ist die Sparrowsche Aussage, die sich in sehr allgemeiner Form, gültig für alle Arten von Geistern, schon bei Rowland<sup>1)</sup> findet.

3. Uns interessiert nicht sowohl die mittlere Intensität als die Abweichungen davon. Wir berechnen sie mit Hilfe des Markoffschen Satzes<sup>2)</sup> über die wahrscheinliche Summe von  $N$  in einer Ebene liegenden Vektoren. Die  $N$  Vektoren sind bei uns die von den  $N$  Spalten im Aufpunkt erregten Feldstärken

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = e^{i\mu(1g + \xi_1)} = \cos \mu(1g + \xi_1) + i \sin \mu(1g + \xi_1) \\ \vdots \\ \mathfrak{E}_N = \cos \mu(Ng + \xi_N) + i \sin \mu(Ng + \xi_N) \end{cases} \quad \begin{matrix} = X_1 + i Y_1 \\ \vdots \\ = X_N + i Y_N \end{matrix}$$

Nach Markoff ist die Wahrscheinlichkeit, daß ihre Summe, also der Vektor

$$\mathfrak{E} = \sum_p^{1..N} \mathfrak{E}_p$$

von seinem Mittelwert aus gerechnet die Koordinaten  $X \dots X + dX$ ,  $Y \dots Y + dY$  habe, angenähert durch

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{AB - C^2}} e^{-\frac{BX^2 + AY^2 - 2CXY}{2(AB - C)}} dX dY$$

gegeben.<sup>3)</sup>  $A, B, C$  sind dabei nach bestimmten Rechenvorschriften zu bildende Funktionen von  $N, \mu, h, g$ .

4. Wir berechnen  $A$ . Hierzu bilden wir zuerst

$$(11) \quad a_p = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p dw_p$$

wo  $dw_p$  die in (3) gegebene Wahrscheinlichkeit ist, daß der  $p$ -te Spalt um  $\xi_p \dots \xi_p + d\xi_p$  von seiner richtigen Stelle ab-

1) H. A. Rowland, Phil. Mag. 35. S. 397. 1893. S. 411; Phys. Papers, Baltimore 1902. S. 538.

2) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, dt. von H. Liebmann, Leipzig u. Berlin 1912. S. 173 ff.

3) In der von Laue, Berl. Ber. 47. S. 1144. 1914, gewählten Bezeichnungweise, der wir uns auch fernerhin im wesentlichen anschließen.

liege, m. a. W. die Wahrscheinlichkeit des Wertepaares  $X_p Y_p$ . Mit (9) und (3) wird

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} a_p &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu(pg + \xi_p) e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cos \mu p g \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu \xi_p \cdot e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p \\ &= e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \cos \mu p g^1) \end{aligned} \right.$$

Weiter bilden wir hieraus

$$a_p' = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_p - a_p)^2 dw_p$$

wofür wegen (11) und

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dw_p = 1$$

geschrieben werden kann

$$\begin{aligned} a_p' &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_p^2 dw_p - a_p^2 \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \mu(pg + \xi_p) e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos^2 \mu p g \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 + \cos 2\mu(pg + \xi_p)\} e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos^2 \mu p g \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\frac{\mu^2}{h^2}} \cos 2\mu p g \right) - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos^2 \mu p g \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) + \frac{1}{2} \cos 2\mu p g \left( e^{-\frac{\mu^2}{h^2}} - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos 2\mu p g \right) \end{aligned}$$

Hiermit wird endlich definitionsgemäß

1) Vgl. z. B. D. Bierens de Haan, *Nouvelles Tables d'Intégrales Définies*. Leyden 1867. S. 385.

$$A = \sum_p^{1..N} a_p' = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( N - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sum_p^{1..N} \cos 2\mu p g \right)$$

und unter Benutzung einer bekannten Formel für die letzte Summe<sup>1)</sup>

$$(14) \quad A = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( N - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\cos(N+1)\mu g \sin N\mu g}{\sin \mu g} \right)$$

In der gleichen Weise findet man  $B$ , indem man nacheinander bildet

$$(15) \quad b_p = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_p dw_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \mu(pg + \xi_p) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p$$

$$(16) \quad = e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin \mu p g$$

dann

$$\begin{aligned} b_p' &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Y_p - b_p)^2 dw_p = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_p^2 dw_p - b_p^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( 1 + e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos 2\mu p g \right) \end{aligned}$$

schließlich

$$(17) \quad \begin{cases} B = \sum_p^{1..N} b_p' \\ = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( N + e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\cos(N+1)\mu g \sin N\mu g}{\sin \mu g} \right) \end{cases}$$

Zur Bildung des  $C$  ist auszugehen von

$$c_p' = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_p - a_p)(Y_p - b_p) dw_p$$

mit (11), (13) und (15)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_p Y_p dw_p - a_p b_p$$

mit (12) und (16)

1) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einf. in d. höhere Mathematik. 1. Bd. Leipzig 1919. S. 297.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\mu(pg + \xi_p) e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p - \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin 2\mu pg \\
&= \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu^2}{h^2}} \sin 2\mu pg - \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin 2\mu pg \\
&= -\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin 2\mu pg
\end{aligned}$$

$C$  ist definiert durch

$$C = \sum_p^{1..N} c_p' = -\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sum_p^{1..N} \sin 2\mu pg$$

was — wieder mit Benutzung einer bekannten Summenformel<sup>1)</sup> —

$$(18) \quad C = -\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\sin(N+1)\mu g \sin N\mu g}{\sin \mu g}$$

gesetzt werden kann.

5. Damit sind die Koeffizienten in dem Markoffschen Wahrscheinlichkeitsausdruck (10) gefunden. Die Rechnungen der vorigen Nummer geben weiter die Möglichkeit, die für das Folgende benötigten *Koordinaten des*  $\mathfrak{E}$ , des Mittelwertes von  $\mathfrak{E}$ , zu bestimmen.  $a_p$  nämlich ist nach (11) der Mittelwert von  $X_p$ , d. i. der  $X$ -Koordinate von  $\mathfrak{E}_p$ . Also ist

$$(19) \quad a^* = \sum_p^{1..N} a_p$$

der Mittelwert der  $X$ -Koordinate von  $\mathfrak{E} = \sum \mathfrak{E}_p$ , d. h. die  $X$ -Koordinate von  $\mathfrak{E}$ .

Ebenso ist nach (15)  $b_p$  der Mittelwert der  $Y$ -Koordinate von  $\mathfrak{E}$ ; also wird

$$b^* = \sum_p^{1..N} b_p$$

der Mittelwert der  $Y$ -Koordinate von  $\mathfrak{E}$ , d. h. die  $Y$ -Koordinate von  $\mathfrak{E}$ .

Die Ausrechnung liefert

---

1) Vgl. H. v. Mangoldt, a. a. O.

$$(20) \quad a^* = e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \sum_p^{1..N} \cos \mu p g = e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \cos \frac{(N+1)\mu g}{2} \frac{\sin \frac{N\mu g}{2}}{\sin \frac{\mu g}{2}}$$

$$(21) \quad b^* = e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \sum_p^{1..N} \sin \mu p g = e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \sin \frac{(N+1)\mu g}{2} \frac{\sin \frac{N\mu g}{2}}{\sin \frac{\mu g}{2}}$$

$\mathfrak{E}^2$  wird hiernach

$$(22) \quad \mathfrak{E}^2 = a^{*2} + b^{*2} = e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\sin^2 \frac{N\mu g}{2}}{\sin^2 \frac{\mu g}{2}}$$

was zu unterscheiden ist von  $\overline{\mathfrak{E}}^2 = J$ . Letzteres ergibt sich durch einen Vergleich von (5) mit (14), (17) und (22) zu

$$(23) \quad J = A + B + a^{*2} + b^{*2}$$

und zwar stellt  $A + B$  das Opaleszenzfeld,  $a^{*2} + b^{*2}$  das Fraunhofersche Beugungsbild dar.

6. Eine Abschätzung der Größe von  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $A$ ,  $B$  gestattet gewisse Vereinfachungen.

$a^*$  wie  $b^*$  enthält nach (20) und (21), je mit zwei Faktoren multipliziert, die kleiner als 1 sind, den aus der klassischen Beugungstheorie bekannten Quotienten der beiden Sinus, der in dem für die Geister allein wichtigen Gebiete zwischen den Hauptmaximis teils verschwindet (nämlich in den Nebenminimis), teils sich so wenig über den Nullwert erhebt (in den Nebenmaximis, von denen in der Nähe der Hauptmaxima abgesehen), daß die überhaupt bemerkbaren Geisterintensitäten von anderer Größenordnung sein müssen als  $a^{*2} + b^{*2}$ . Wir fassen daher im folgenden den Markoffschen Ausdruck (10) nicht als die Wahrscheinlichkeit dafür auf, daß der Vektor  $\mathfrak{E}$  die Koordinaten  $X$ ,  $Y$  von seinem Mittelwert aus gerechnet hat, also die Koordinaten  $X + a^*$ ,  $Y + b^*$ , sondern daß  $\mathfrak{E}$  die Koordinaten  $X$ ,  $Y$  hat.

Ähnliche Quotienten von sinus, auch mit Faktoren kleiner als 1 multipliziert, nur gegenüber  $a^*$  und  $b^*$  von verdoppelten Argumenten zu nehmen, treten in  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf — (14), (17), (18) — in  $A$  und  $B$  als Term neben  $N$ , in  $C$  allein. Wir setzen wieder vereinfachend

$$(24) \quad \begin{cases} A = B = \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) \frac{N}{2} \\ C = 0 \end{cases}$$

was in den Nebenminimis genau, in den Nebenmaximis aus den angeführten Gründen annähernd gilt. Wieder müssen wir dabei von der Nachbarschaft der Hauptmaxima absehen, außerdem aber noch, wenigstens hinsichtlich  $A$  und  $B$ , von den Mittelstellen zwischen zwei Hauptmaximis. Denn hier nimmt  $\mu g$  die Werte  $180^\circ$ ,  $540^\circ$  ... an:  $\sin \mu g$  wird ebenso wie  $\sin N\mu g$  gleich Null, der Quotient der Sinus gleich  $N$ . In  $C$  ist dieser Quotient mit  $\sin(N+1)\mu g$  multipliziert, was Null ist, so daß  $C$  auch hier in Strenge verschwindet. Aber in  $A$  und  $B$  tritt  $\cos(N+1)\mu g$  als Faktor des Sinusquotienten auf, d. h.  $\pm 1$ :  $A$  und  $B$  nehmen also an diesen Mittelstellen ganz verschiedene Werte an, ebenso wie unmittelbar neben den Hauptmaximis. Diese bedenklichen Winkelbereiche sind aber so eng begrenzt, daß sie für das Gesamtgebiet nicht ins Gewicht fallen und im folgenden keine gesonderte Behandlung erfahren.

Mit den Vereinfachungen dieser Nummer folgt aus dem Markoffschen Ausdruck als die Wahrscheinlichkeit, daß der Endpunkt von  $\mathfrak{C}$  die Koordinaten  $X$ ,  $Y$  hat,

$$(25) \quad \frac{1}{2\pi A} e^{-\frac{X^2 + Y^2}{2A}} dX dY$$

Die Verteilungsfunktion enthält  $X$  und  $Y$  jetzt nur in der Kombination  $X^2 + Y^2 = r^2$ , wo  $r^2$  die Intensität darstellt. Einem bestimmten  $r^2$ , also allen Punkten eines Kreises um den Koordinatenanfangspunkt, kommt im Gegensatz zu dem nicht vereinfachten Markoffschen Ausdrucke der gleiche Wahrscheinlichkeitswert zu. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Intensität einen Wert zwischen  $r^2$  und  $(r+dr)^2$  habe, wird unter Einführung des ringförmigen Elementarbereichs  $2\pi r dr$ :

$$(26) \quad \frac{1}{2\pi A} e^{-\frac{r^2}{2A}} \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{A} e^{-\frac{r^2}{2A}} r dr$$

7. Wir sind nahezu am Ziel. Denn aus (26) folgt als Wahrscheinlichkeit, daß die Intensität an einer Spektralstelle einen Wert  $R^2$  oder darüber habe, durch Integration von  $R$  bis  $\infty$ :



$$(27) \quad \frac{1}{A} \int_R^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2A}} r dr = e^{-\frac{R^2}{2A}}$$

Damit ist die erste der am Schluß von Nr. 1 gestellten Fragen im wesentlichen beantwortet. Eine Ergänzung ist nur insofern nötig, als der abgeleitete Ausdruck dem Wesen des „Geistes“ noch nicht genügend Rechnung trägt. Denn eine Intensität  $R^2$ , auch wenn sie so groß ist, daß sie zur experimentellen Beobachtung ausreicht, macht noch keinen Geist, wenn das Opaleszenzfeld an dieser Stelle annähernd gleich intensiv oder gar intensiver ist. Damit ein Geist auftrete, ist eine weitere Forderung hinzuzufügen:  $R^2$  muß mindestens  $p$  Proz. größer sein als das umliegende Opaleszenzfeld. Erst beide Forderungen zusammengenommen charakterisieren ihn.

Welche von beiden — „Mindestintensität  $R^2$ “ oder „ $p$  Proz. intensiver als die Umgebung“ — die schärfere ist, hängt vom Beugungswinkel  $\varphi$  ab. Bei kleinen Beugungswinkeln ist das Opaleszenzfeld  $2A$  so klein, daß  $R^2$  die Umgebung um mehr als  $p$  Proz. übertrifft. Hier verlangt die erste Forderung mehr. Bei wachsendem  $\varphi$  und damit wachsendem Opaleszenzfeld aber kommen wir an die kritische Stelle, wo  $R^2$  gerade um  $p$  Proz. über die Umgebung ragt, und von hier ab ist die zweite Forderung schärfer.

Die schärfere Forderung bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Geistes. Bis zur kritischen Stelle ist sie durch den mit wachsendem  $\varphi$  ansteigenden Ausdruck (27) gegeben. Darüber hinaus ist er durch einen leicht anzugebenden andern zu ersetzen. Da nämlich nach Nr. 5 (Schluß) das Opaleszenzfeld die mittlere Intensität  $A + B$ , in unserer Vereinfachung  $2A$ , hat, ist nach (27) die Wahrscheinlichkeit einer Intensität von  $p$  Proz. darüber oder einer größeren

$$(28) \quad e^{-\frac{2A + \frac{p}{100} \cdot 2A}{2A}} = e^{-\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

In Figur 1 sind die beiden Wahrscheinlichkeitsausdrücke (27) und (28) dargestellt. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $W$  eines Geistes ist immer der kleinere von beiden Werten maßgebend; denn schärfere Forderung heißt kleinere Wahrscheinlichkeit. Bis zum kritischen Winkel  $\varphi^*$  folgt also die Kurve  $W$

dem ansteigenden  $e^{-\frac{R^2}{2A}}$ , bei  $\varphi^*$  geht sie zu  $e^{-\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$  über, wie das durch stärkeres Ausziehen angedeutet ist. Über die Abszissenangaben in  $q$  und die Ordinatenbezeichnung vgl. Nr. 9.

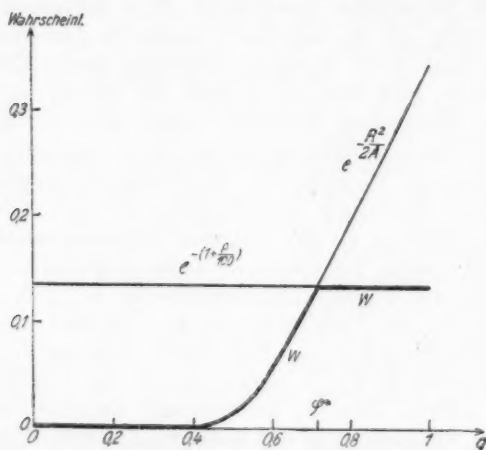


Fig. 1

8. Die wahrscheinliche Anzahl von Geistern in einem bestimmten Winkelbereich  $\varphi_2 - \varphi_1$  — die zweite in Nr. 1 aufgeworfene Frage — ist durch

$$(29) \quad G = Z \cdot \bar{W}$$

gegeben, wo  $\bar{W}$  der Mittelwert des  $W$  für diesen Bereich und  $Z$  die Anzahl der im Bereich hinsichtlich ihrer Intensität voneinander unabhängigen Stellen ist.

$\bar{W}$  ist bei Bereichen oberhalb der kritischen Stelle  $\varphi^*$  einfach gleich  $W$ . Unterhalb von  $\varphi^*$  muß es im allgemeinen durch graphische Integration gebildet werden. Nur wenn wie bei Sparrow, Nr. 2,

$$2A = N \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) = N \frac{\mu^2}{2h^2} = \frac{2N\pi^2 \sin^2 \varphi}{\lambda^2 h^2}$$

und hierin überdies  $\sin^2 \varphi = \varphi^2$  gesetzt werden darf, wird das Integral

$$\bar{W} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-\frac{R^2}{2A}} d\varphi \quad \text{zu} \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-\frac{\text{Constans}}{\varphi^2}} d\varphi$$

führt also aufs Fehlerintegral.

Betreffs  $Z$  wird in einer gleichzeitig in der Physikalischen Zeitschrift erscheinenden Arbeit gezeigt, daß die Intensität an einer Spektralstelle  $\varphi$  wesentlich die Intensität in einem Nachbarbereiche mitbestimmt, der nach jeder Seite so weit reicht wie zwei Nebenminima voneinander entfernt sind, das ist bis  $\varphi \pm \frac{\lambda}{Ng}$ .<sup>1)</sup> Wir fassen demnach zwei um  $\frac{\lambda}{Ng}$  entfernte Stellen als unabhängig auf, schreiben also dem Bereiche  $\varphi_2 - \varphi_1$

$$Z = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda/Ng} = \frac{Ng(\varphi_2 - \varphi_1)}{\lambda}$$

unabhängige Stellen zu. In (29) eingesetzt ergibt das

$$(30) \quad G = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) Ng \bar{W}}{\lambda}$$

als die wahrscheinliche Zahl der in  $\varphi_2 - \varphi_1$  anzutreffenden Geister der gekennzeichneten Art. Ersetzen wir noch  $\varphi$  und  $\lambda$  durch das allgemeinere  $q$ , die Ordnung der Interferenz, so tritt, da der Winkelbereich  $\lambda/g$  von einem Hauptmaximum zum nächsten einem  $\Delta q = 1$  entspricht, an Stelle der letzten Gleichung:

$$(30a) \quad G = (q_2 - q_1) N \bar{W}$$

Nach der genannten Arbeit besteht ferner eine „Intensitätskoppelung“ zwischen entfernten Stellen des Beugungsbildes: wenn an der Stelle  $q$  eine hervorragende Opaleszenzintensität herrscht, so kehrt eine solche zwangsläufig wieder erstens in allen andern Ordnungen, also an den Stellen

$$(31a) \quad q' = q \pm n \frac{\lambda}{g} \quad (n \text{ ganze Zahl})$$

zweitens an der zum benachbarten Hauptmaximum symmetrischen Stelle und an den ihr entsprechenden Stellen in allen andern Ordnungen, d. h. bei den Winkeln

$$(31b) \quad q'' = \pm n \frac{\lambda}{g} - q \quad (n \text{ ganze Zahl einschl. Null})$$

1) Genauer  $\varphi \pm \frac{\lambda}{Ng \cos \varphi}$  wie in der bekannten Formel für die Winkelbreite des Beugungsbildes; vgl. z. B. P. Drude, Lehrb. d. Optik, Leipzig 1912. S. 215.

Demnach sind in Fig. 2, wo  $M$  das Mittelbild,  $I$  und  $-I$  die benachbarten Hauptmaxima andeuten, alle vermerkten Stellen miteinander gekoppelt. Der Index an den einzelnen  $\varphi_i'$  und  $\varphi_i''$  gibt den Wert von  $n$  gemäß (31a) und (31b).

Im Gegensatz zu den von periodischen Fehlern herrührenden Geistern läßt sich also über Zahl und Intensität der hier untersuchten nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage machen, wenn man den Winkelbereich  $\lambda/2g$  oder  $\Delta q = \frac{1}{2}$  von einem



Fig. 2

Hauptmaximum bis halbwegs zum nächsten ins Auge faßt. Damit aber sind die Verhältnisse im ganzen übrigen Beugungsbilde festgelegt: an den gekennzeichneten Stellen kehren Geister wieder, in einer Intensität, die nach Nr. 2 proportional dem Quadrate der Ordnungszahl  $q$  ist.

Alles das bezieht sich auf eine Wellenlänge. Jedes  $\lambda$  hat sein Geistersystem; die Spektrallinie sammelt aber ihre Geister nicht um sich wie die Rowlandschen, sondern verstreut sie wie die Lymanschen.<sup>1)</sup>

9. Wir stellen ein Zahlenbeispiel in einer Form dar, die gegebenenfalls als Rechenvorschrift bei der Beurteilung fehlerhafter Gitter dienen kann. Unser Gitter habe

$$N = 10000$$

unendlich schmale Spalte, die Gitterkonstante sei

$$g = 2 \cdot 10^{-4}$$

a) Die linearen Abweichungen  $\varepsilon_i$  der einzelnen Spalte von ihrer richtigen Lage werden gemessen<sup>2)</sup>, hieraus der mittlere Fehler

$$m = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N}}$$

1) Zu deren Theorie vgl. C. Runge, Ann. d. Phys. 71, S. 178. 1923.

2) Vgl. die Ausführungen und photographischen Aufnahmen von L. C. Glaser, Ztschr. f. techn. Physik 7, S. 31. 1926.

bestimmt.  $h$  hängt mit ihm durch die Gleichung zusammen

$$h = \frac{1}{\sqrt{2} m}$$

Wird  $m$  in Bruchteilen des  $g$  ausgedrückt, so stellt sich  $h$  als  $c/g$  dar, wo  $c$  der nunmehr die Präzision charakterisierende Zahlenfaktor ist. Wir nehmen  $m$  als  $g/20$  an.

b) Für den fraglichen Bereich des  $q$  wird der Wert von

$$\frac{\mu^2}{2h^2} = \frac{4\pi^2 \sin^2 \varphi}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{2h^2} = \frac{4\pi^2 q^2 \lambda^2}{g^2 \lambda^2} \cdot \frac{1}{2h^2} = \frac{2\pi^2 q^2}{c^2}$$

und der von

$$e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} = e^{-\frac{2\pi^2 q^2}{c^2}}$$

tabellarisch festgelegt.  $\mu^2/2h^2$  steigt in unserem Beispiel für  $q = 0$  bis  $q = 1$  von 0 bis 0,395.  $e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}$  fällt im gleichen Bereiche von 1 auf 0,674.

c) Eine entsprechende Tabelle oder Kurve wird für

$$(32) \quad 2A = N \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right)$$

berechnet: Figur 3, die nach (23) gleichzeitig den Anstieg des Opaleszenzfeldes mit  $q$  darstellt.<sup>1)</sup>

d) Die Wahrscheinlichkeit, daß an einer Stelle ein Geist von der Intensität  $R^2$  oder einer größeren auftritt, ist nach (27)

$e^{-\frac{R^2}{2A}}$ . Man zeichnet diese Kurve durch den interessierenden Bereich. Hierbei ist die Maßzahl von  $R^2$  dadurch bestimmt,

1) Hier sei bemerkt, wie eine endliche Spaltbreite  $a$  in Rechnung zu setzen ist. Sie tritt nach der Beugungstheorie in der Ausgangs-

gleichung (1) für  $J$  in der Form des Faktors  $\frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2}$  auf und so fort,

bis der gleiche Faktor dann auch in  $\bar{J}$ , (5), erscheint. Nach (23) ist zu vermuten, daß er auch in  $A$ ,  $B$ ,  $a^{*2}$ ,  $b^{*2}$  auftritt, was über  $\mathfrak{E}$ ,  $a_p$ ,  $a_p'$  leicht zu bestätigen ist. An Stelle unseres  $2A$ , (32), ist demnach schließlich zu schreiben

$$N \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2}$$

daß in unsern Formeln den Hauptmaximis (oder wenn der endlichen Spaltbreite Rechnung getragen wird, wenigstens dem Mittelbilde) die Intensität  $N^2$  zugeschrieben wird. In Figur 2 sind als Abszissen- und Ordinatenbezeichnung die Zahlenwerte unseres Beispiels eingetragen. In Spalte 1 der folgenden Tabelle ist  $e^{-\frac{R^2}{2A}}$  für einige  $q$  vermerkt, wobei  $R^2 = 1000$  ge-

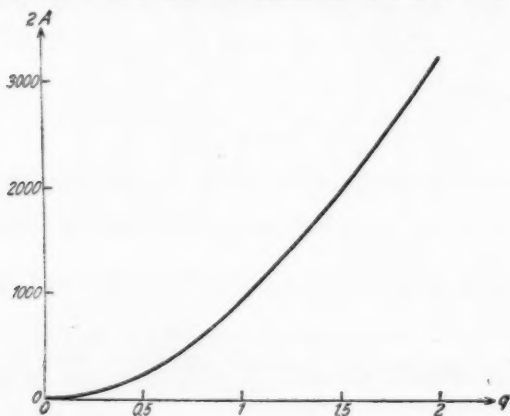


Fig. 3

setzt ist; d. h. wir lesen die Wahrscheinlichkeit ab, daß der Geist eine Intensität gleich  $1/100000$  von der des Mittelbildes ( $N^2 = 10^5$ ) hat.

Verlangen wir als Mindestintensität  $1/10000$  des Zentralbildes, setzen wir also  $R^2 = 10^4$ , so ergeben sich wesentlich kleinere Wahrscheinlichkeiten, die Zahlenwerte in Spalte 2 der Tabelle.

e) In das gleiche Schaubild (Fig. 2) zeichnen wir die der Abszissenachse parallele Gerade  $e^{-\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$  ein, die nach (28) die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß der Geist mindestens  $p$  Proz. intensiver ist als das umgebende Opaleszenzfeld. In Figur 2 ist  $p$  gleich 100 gewählt, wodurch die fragliche Wahrscheinlichkeit zu  $e^{-2} = 0,1353$  wird.

f) Um die wahrscheinliche Zahl  $G$  der charakterisierten Geister in einem Winkelgebiete  $q_2 - q_1$  zu finden, ist aus Figur 2 durch graphische Integration das mittlere  $\bar{W}$  des Ge-

Tabelle

$$e^{-\frac{R^2}{2A}}$$

$q$	Mittlerer Fehler $m = \frac{g}{20}$		Mittlerer Fehler $m = \frac{g}{40}$	
	1. $R^2 = 1000$	2. $R^2 = 10\,000$	3. $R^2 = 1000$	4. $R^2 = 10\,000$
0	0	0	0	0
0,2	0,0 <sub>16</sub> 13	0	0	0
0,4	0,0017	0	0,0 <sub>16</sub> 13	0
0,6	0,0572	0,0 <sub>13</sub> 47	0,0 <sub>4</sub> 13	0
0,8	0,195	0,0 <sub>8</sub> 81	0,0017	0
1	0,345	0,0 <sub>4</sub> 24	0,0165	0
1,2	0,470	0,0 <sub>5</sub> 53	0,0572	0,0 <sub>13</sub> 47
1,4	0,566	0,0029	0,120	0,0 <sub>6</sub> 63
1,6	0,639	0,0113	0,195	0,0 <sub>8</sub> 81
1,8	0,694	0,0259	0,272	0,0 <sub>6</sub> 22
2	0,736	0,0465	0,345	0,0 <sub>4</sub> 24

bietes zu bestimmen und dieses dann gemäß (30a) mit  $N(q_2 - q_1)$  zu multiplizieren. Wir fragen in unserem Beispiel nach der wahrscheinlichen Geisterzahl zwischen Mittelbild bis halbwegs zum ersten Hauptmaximum. Dann ist

$$Z = N(q_2 - q_1) = \frac{10^4}{2}$$

die Zahl der unabhängigen Stellen. Und da sich  $\bar{W}$  graphisch zu 0,0016 ergibt, ist 8 die fragliche Anzahl. Von  $q = \frac{1}{2}$  bis  $q = 1$ , wo z. T. schon die  $p$ -Proz.-Forderung als die schärfere zu berücksichtigen ist, ist  $\bar{W} = 0,105$ ,  $G = 525$ .

Hätten wir die zehnfache Mindestintensität  $R^2 = 10000$  verlangt, so hätte sich  $G$  im Gebiete  $q = 0$  bis  $q = \frac{1}{2}$  praktisch Null, im Gebiete  $q = \frac{1}{2}$  bis  $q = 1$  auch nur zu 0,011 ergeben: im Durchschnitt wiese also nur jedes hundertste Gitter dieser Art einen solchen Geist auf. In allen Fällen einer Mittelung über derart ausgedehnte Winkelbereiche, in denen  $W$  stark ansteigt, ist eine Häufung der Geister bei den größten Beugungswinkeln des Bereiches zu erwarten.

10. Damit auch der Einfluß der Gitterpräzision hervortrete, seien noch Angaben über ein Gitter hinzugefügt, das nur einen halb so großen mittleren Fehler als das in Nr. 9 behandelte hat, also

$$m = \frac{g}{40}$$

Spalte 3 und 4 der Tabelle geben die berechneten Wahrscheinlichkeitswerte eines Geistes wieder von der Mindestintensität  $R^2 = 1000$  und  $R^2 = 10000$ .

Die wahrscheinliche Anzahl der Geister ist bei der geringeren Mindestintensität  $R^2 = 1000$  im Bereich

$q = 0$  bis  $q = \frac{1}{2}$ : praktisch Null,

$q = \frac{1}{2}$  bis  $q = 1$ : 17

$q = 1$  bis  $q = 1\frac{1}{2}$ : 378

$q = 1\frac{1}{2}$  bis  $q = 2$ : 677

Der letzte Bereich fällt schon ganz in die „p-Proz.-Forderung“.  $G = 677$  kehrt von nun ab für jedes weitere  $q_2 - q_1 = \frac{1}{2}$  wieder.

Bei der größeren Mindestintensität  $R^2 = 10000$  ist im Bereich  $q = 1\frac{1}{2}$  bis  $q = 2$  nur 0,020 Geist zu erwarten. Das Gebiet näher am Mittelbild,  $q = 0$  bis  $q = 1\frac{1}{2}$ , ist praktisch geisterfrei.

#### Zusammenfassung

Unperiodische Teilungsfehler eines Gitters rufen einen kontinuierlichen Untergrund im Beugungsbilde hervor, das Opaleszenzfeld, das im Mittel mit wachsenden Beugungswinkeln ansteigt. In allen praktischen Fällen treten Abweichungen vom Mittel, Intensitätsschwankungen, auf, die den Untergrund granuliert erscheinen lassen. Stellen großer positiver Schwankung heben sich als Geister ab.

Berechnet wird die Wahrscheinlichkeit, bei einem gegebenen Gitter an einer bestimmten Spektralstelle einen Geist anzutreffen, der eine gegebene Mindestintensität hat oder der um einen gegebenen Betrag intensiver ist als das umliegende Opaleszenzfeld; ferner die wahrscheinliche Anzahl derartiger Geister in einem bestimmten Winkelgebiet. Für den Bereich von einem Hauptmaximum bis halbwegs zum nächsten lassen sich nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über das Auftreten von Geistern machen; durch die Geisterverteilung in einem solchen Bereich aber sind die Verhältnisse im ganzen übrigen Beugungsbilde eindeutig bestimmt.

Danzig, Technische Hochschule.

(Eingegangen 15. April 1926)



## 6. Beitrag zur Messung von Röntgennormalen; von J. Schrör

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Bonn)

Nach der Schneidenmethode wurden an 25 Elementen  
Präzisionsmessungen in der *K*- und *L*-Serie ausgeführt

(Hierzu Tafel IV)

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung früherer Arbeiten, die im Bonner physikalischen Institut auf Veranlassung von Hrn. H. Konen über die Messung von Röntgenwellenlängen gemacht worden sind. Ich verweise auf die Arbeiten von Vogel<sup>1)</sup>, Weber<sup>2)</sup> und Lang.<sup>3)</sup> Die von mir benutzten seltenen Substanzen wurden von Baron Auer von Welsbach Hrn. Prof. Konen zur Verfügung gestellt. Auch an dieser Stelle sei dafür herzlich gedankt. Ferner danke ich der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft für die Unterstützung, die die Arbeit durch sie erfahren hat.

Es wurden die stärksten Linien der *L*-Serie der seltenen Erden gemessen und die Linien vieler anderer Elemente nachgeprüft. Die gesteigerten Anforderungen an die Genauigkeit der Röntgenwellenlängen verlangen, wie schon mehrfach betont, wiederholte Messungen nach verschiedenen Methoden. Deshalb ist in unserem Institut, nachdem die Möglichkeit von Präzisionsmessungen von Röntgenwellenlängen mit Hilfe der Seemannschen Schneidenmethode erwiesen worden war, zunächst stets mit dem Schneidenspektrographen gearbeitet worden mit Rücksicht darauf, daß anderwärts bisher nur die Lochkamera benutzt wurde. Für die absolute Wellenlängenmessung war allerdings bei diesem Seemannschen Schneidenspektrographen in seiner ersten Ausführung die unsichere Lage des Nullpunktes eine große Schwierigkeit. Auf die Fehlerquelle, die in der einseitigen Liniendefinition begründet ist, werde ich noch näher

1) W. Vogel, Ztschr. f. Phys. 4. S. 257. 1921.

2) A. Weber, Ztschr. f. Phys. 4. S. 149. 1921.

3) K. Lang, Ann. d. Phys. 75. S. 489. 1924.

einzugehen haben. Um die Unsicherheit in der Markierung des Nullpunktes, die durch die Unschärfe des reellen Bildes erzeugt wird, zu beseitigen, hatte W. Vogel einen etwa um  $180^\circ$  drehbaren Schneidenspektrographen gebaut, der gestattet, die Spektre auf beiden Seiten des Nullpunktes symmetrisch auf die Platte zu bekommen. Trotzdem stießen absolute Messungen noch auf Schwierigkeiten. Denn erstens muß genau um  $180^\circ$  gedreht werden, und zweitens ist es schwer, den Abstand Drehachse—Platte mit der nötigen Genauigkeit zu bestimmen. Immerhin waren die damaligen Resultate befriedigend. Die Schwierigkeiten fallen bei der relativen Messung sekundärer Normalen fort, einer Aufgabe, die zunächst wichtiger scheint als die absoluten Messungen.<sup>1)</sup> Wie Lang gehe ich von der  $\text{Cu } K_\alpha$ -Linie aus, die infolge ihrer Schärfe und sonstigen Vorzüge ja wohl an erster Stelle als primäre Normale in Frage kommt. Besonders günstig war die Verwendung der  $\text{Cu } K_\alpha$ -Linie als Normale in meinem Falle noch deshalb, weil die Wellenlängen der untersuchten Elemente in der Nähe der Kupferlinien liegen. Die Substanzen wurden alle als Pulver aufgerieben. So wurde erreicht, daß die als Normale benutzte  $\text{Cu } K_\alpha$ -Linie bei der verwendeten Kupferantikathode gleichzeitig mit auf die photographische Platte kam, was sich als wichtig erwies, da der Abstand Spalt—Platte sich im Laufe der Zeit durch Erschütterungen, Temperaturschwankungen oder andere Effekte änderte. Infolgedessen hatte die  $K_\alpha$ -Kupferlinie nicht immer denselben Abstand vom Nullpunkt.

Beim Beginn meiner Arbeit hatte ich die Wahl zwischen einer Ionen- und Elektronenröhre. Beide Apparaturen waren vorhanden. Ich entschied mich für die schon von K. Lang benutzte und sehr bewährte Ionenröhre, da ich zum Teil mit äußerst leicht verdampfenden Substanzen arbeiten wollte und mich davon überzeugt hatte, daß übergroße Intensitäten die aufgeriebenen Pulver allzu schnell zur Verdampfung brachten, und daß andererseits die Intensität der alten Ionenröhre für meine Zwecke vollkommen genügte. Auch der Schneidenspektrograph war derselbe wie der von K. Lang benutzte. Über die Beschaffenheit und Justierung dieses Spektrographen

1) A. Weber, a. a. O. S. 149 und K. Lang, a. a. O. S. 489.

haben bereits Weber und Lang ausführlich berichtet. Wesentlich verbessert wurden dagegen die elektrischen Hilfsmittel. So gelang es, das Intensitätsmaximum der Röntgenstrahlung schon bei einem Primärstrom von nur 2—3 A. bei 110 V. herauszuholen, während früher 12—15 A. bei 150 V. verwendet wurden. Der Sekundärstrom war durchschnittlich 4—5 M.-A. Es wurde nach und nach eine solche Betriebssicherheit erzielt, daß die Röntgenröhre selbst bei aufgeriebenen leicht verdampfen- den Pulvern fast unbeaufsichtigt stundenlang ohne die geringste Störung bei gleichbleibender Intensität in Betrieb bleiben konnte.

Die Hauptschwierigkeit bestand darin, zu verhindern, daß die auf die Antikathode gebrachten Substanzen nicht zu schnell verdampften. Es mußte also für eine kleine Flächenintensität im Brennfleck gesorgt werden. Dies wurde einfach dadurch erreicht, daß die Röhre eine gewisse Zeit bei starker Belastung und verhältnismäßig hohem Gasdruck betrieben wurde. Hierdurch bildete sich nämlich in der Mitte der Kathodenkalotte eine kleine Vertiefung von 1—2 mm Durchmesser mit kleinem Krümmungsradius, so daß also gerade die Mitte des parabolischen Spiegels ausgeschaltet wurde. (So wird ein ähnlicher Effekt erzielt wie bei den kleinen zahntechnischen Röhren von Coolidge, bei denen die Antikathode in der Mitte durchbohrt ist und die Öffnung mit einem Molybdänstift ausgefüllt wird, der ein wenig hervorragt.)

Es wurden die stärksten Linien der *K*- bzw. der *L*-Serie von 25 Elementen im Wellenlängenbereich von 500—2500 X.-E. auf besonders präparierten Platten von Westendorp & Wehner, Köln a. Rh., aufgenommen. In jedem Falle wurden mindestens zwei Aufnahmen gemacht. Bei den vorhandenen Dimensionen des Apparates erwies sich eine Spaltbreite von 0,025 mm als die günstigste. Die Belichtungszeit für eine gute lichtstarke Aufnahme war durchschnittlich eine Stunde bei nichtmetallischen Pulvern, bei Metallen 20—30 Minuten. (Die Belichtung dauerte bei meinen Aufnahmen etwas länger als gewöhnlich, da stets die Cu-Linien mit aufgenommen wurden.) Ausgemessen habe ich die Platten mit dem Zeiss'schen Komparator und zum Vergleich noch mit einer Teilmaschine unseres Institutes, und zwar mit den in der Spektroskopie üblichen Vorsichtsmaßregeln. Die Schneidenmethode bringt es bekanntlich unver-

meidlich mit sich, daß die Linien unsymmetrisch begrenzt sind, und zwar in diesem Falle so, daß der Steilabfall der Intensität nach dem langwelligen Ende hingeht. Die Frage, wie in diesem Falle bei der Messung einzustellen ist, wird bei Weber und Lang ausführlich diskutiert, und auch ich komme darauf zurück. Hier sei nur bemerkt, daß nur eine Einstellung auf das Schwärzungsmaximum möglich ist und zuverlässige und von der Expositionsdauer unabhängige Werte liefert. Im übrigen werden die Linien bei passender Exposition so scharf, daß die hier in Frage kommenden Differenzen von zweiter Ordnung sind.

Die Berechnung erfolgte nach bekannten Formeln. Temperaturkorrekturen wurden dadurch vermieden, daß die Zimmertemperatur (Herbst und Winter 1924/25) konstant gehalten werden konnte. Mit den hiesigen Meßinstrumenten konnte  $1 \cdot 10^{-3}$  mm noch genau gemessen werden, wenn die Fehler der Mikrometerschraube berücksichtigt wurden. Scharfe Linien wurden denn auch bis auf 1 bis  $2 \cdot 10^{-3}$  mm genau gemessen. (1 bis  $10^{-3}$  mm auf der Platte — 0,03 bis 0,04 X-E.)

Es wurden insgesamt 25 Elemente aufgenommen:

		Chem. Verbindung der auf die Antikathode gebrachten Subst.
K-Serie	1. (24) Chrom	Reine Metalle
	2. (25) Mangan	
	3. (29) Kupfer	
	4. (30) Zink	
	5. (34) Selen	vermischt mit Erbiumsulfat Niobsäure
	6. (39) Yttrium	
	7. (41) Niobium	
	8. (42) Molybdän	Reine Metalle
	9. (44) Ruthenium	
	10. (45) Rhodium	
L Serie	11. (92) Uran	Reines Metall
	12. (90) Thorium	Thoriumoxyd
	13. (82) Blei	Reine Metalle
	14. (81) Thallium	
	15. (78) Platin	
	16. (74) Wolfram	
	17. (73) Tantal	
	18. (71) Cassiopeum	Sulfate
	19. (70) Aldebaranium	
	20. (68) Erbium	
	21. (67) Holmium	
	22. (66) Dysprosium	
	23. (65) Terbium	
	24. (64) Gadolinium	
	25. (62) Samarium	

Die eingeklammerten Zahlen sind die Ordnungszahlen der Elemente.

Tabelle 1

Lfd. Nr.	Ordn.-Zahl	Linie	Wellenlängen		V/R	$\Delta \lambda$ Sch.-Siegb.
			Siegbahn	Schrör		
1	24	Cl $K_{\alpha_2}$	2288,95	2288,91	398,18	— 4
		$\alpha_1$	2284,84	2284,84	398,83	0
		$\beta_1$	2080,45	2080,43	348,02	— 2
2	25	Mn $K_{\alpha_2}$	—	2101,26	433,68	—
		$\alpha_1$	2097,32	2097,30	434,40	— 2
		$\beta_1$	1905,91	1905,87	478,14	— 4
3	29	Cu $K_{\alpha_2}$	1641,16	1541,15	591,30	— 1
		$\alpha_1$	1587,30	1537,30	592,77	0
		$\beta_1$	1389,33	1389,35	655,90	2
4	30	Zn $K_{\alpha_2}$	1435,87	1435,87	634,64	0
		$\alpha_1$	1432,06	1432,07	636,32	1
		$\beta_1$	1292,71	1292,75	704,90	4
5	34	Se $K_{\alpha_2}$	1106,42	1106,38	823,65	— 4
		$\alpha_1$	1102,41	1102,44	826,59	3
		$\beta_1$	990,00	990,11	920,37	11
6	39	Y $K_{\alpha_2}$	831,22	831,22	1096,31	1
		$\alpha_1$	827,03	827,03	1101,85	0
		$\beta_1$	739,02	739,01	1233,10	— 1
7	41	Nb $K_{\alpha_2}$	748,79	748,78	1217,01	— 1
		$\alpha_1$	744,54	744,53	1223,97	— 1
		$\beta_1$	633,98	633,95	1437,49	— 3
8	42	Mo $K_{\alpha_2}$	711,87	711,94	1279,99	7
		$\alpha_1$	707,59	707,60	1287,24	1
		$\beta_1$	630,75	630,83	1444,53	8
9	44	Ru $K_{\alpha_2}$	645,88	645,78	1411,14	— 10
		$\alpha_1$	641,54	641,54	1420,44	0
10	45	Rh $K_{\alpha_2}$	616,37	616,36	1478,39	— 1
		$\alpha_1$	612,01	612,99	1486,60	— 2

Mittl. Abweich.  $\pm 2$ 

11	62	Sm $L_{\alpha_2}$	2205,68	2206,22	413,05	54
		$\alpha_1$	2195,01	2195,67	415,99	64
		$\beta_1$	1393,57	1994,05	466,21	48
		$\beta_2$	1870,10	1878,54	485,09	44
		$\gamma_1$	1723,09	1723,57	528,71	48
12	64	Gd $L_{\alpha_2}$	2052,62	2053,19	443,83	57
		$\alpha_1$	2041,93	2042,55	446,21	62
		$\beta_1$	1842,46	1843,09	494,51	63
		$\beta_2$	1741,90	1742,35	522,93	45
		$\gamma_1$	1588,63	1589,00	573,49	37
13	65	ThL $\alpha_2$	1982,32	1982,84	559,58	53
		$\alpha_1$	1971,49	1971,83	462,14	34
		$\beta_1$	1772,68	1773,23	513,77	55
		$\beta_2$	1679,00	1679,59	542,56	59
		$\gamma_1$	1915,64	1916,15	475,57	51
14	66	Dy $L_{\alpha_2}$	1904,60	1905,15	478,32	55
		$\alpha_1$	1706,58	1707,10	533,81	52
		$\beta_2$	1619,80	1620,37	562,39	57

Tabelle 1 (Fortsetzung)

Lfd. Nr	Ordnn. Zahl	Linie	Wellenlängen		V/R	$\Delta \lambda$ Sch.-Siegb.
			Siegbahn	Schrör		
15	67	Ho $L_{\alpha_2}$	1852,06	1852,65	491,87	59
		$\alpha_1$	1840,98	1841,51	495,12	53
		$\beta_1$	1643,52	1644,08	554,28	54
		$\beta_2$	1563,70	1564,30	582,54	60
16	68	Er $L_{\alpha_2}$	1791,40	1791,97	508,54	57
		$\alpha_1$	1780,40	1780,95	511,68	55
		$\beta_1$	1583,44	1583,89	575,84	45
		$\beta_2$	1510,60	1511,16	602,95	56
17	70	Ad $L_{\alpha_2}$	1678,90	1679,26	542,67	36
		$\alpha_1$	1667,79	1668,30	546,23	51
		$\beta_1$	1472,50	1473,16	618,58	66
		$\beta_2$	1412,80	1413,34	644,88	54
18	71	Cp $L_{\alpha_2}$	1626,36	1627,06	560,07	70
		$\alpha_1$	1615,51	1616,10	563,87	59
		$\beta_1$	1420,70	1421,29	641,16	59
		$\beta_2$	1367,20	1367,68	666,29	48
19	73	Ta $L_{\alpha_2}$	1529,40	1529,94	595,62	54
		$\alpha_1$	1518,25	1518,77	600,00	52
		$\beta_1$	1322,54	1324,18	688,18	64
		$\beta_2$	1281,00	1281,53	711,08	53
20	74	W $L_{\alpha_2}$	1134,71	1135,27	802,69	56
		$\alpha_1$	1484,52	1485,18	613,60	61
		$\beta_1$	1473,48	1473,99	616,81	51
		$\beta_2$	1279,17	1269,63	712,14	46
21	78	Pt $L_{\alpha_2}$	1241,91	1242,30	733,54	39
		$\gamma_1$	1095,53	1095,96	831,48	43
		$\alpha_1$	1321,21	1321,72	689,45	51
		$\beta_1$	1310,08	1310,58	695,32	50
22	81	Tl $L_{\alpha_2}$	1117,22	1117,71	815,30	49
		$\alpha_1$	1099,50	1100,02	828,41	52
		$\beta_1$	955,45	956,07	953,14	62
		$\beta_2$	1216,03	1216,65	749,00	62
23	82	Pb $L_{\alpha_2}$	1204,71	1205,16	756,14	45
		$\alpha_1$	1012,66	1013,17	899,42	51
		$\beta_1$	1007,86	1008,27	903,80	41
		$\gamma_1$	865,29	865,80	1052,52	51
24	90	Th $L_{\alpha_2}$	1183,52	1184,13	759,57	61
		$\alpha_1$	1172,02	1172,63	777,11	61
		$\beta_{1,3}$	979,90	980,54	929,36	64
		$\gamma_1$	887,08	887,71	1087,81	63
25	92	U $L_{\alpha_2}$	965,24	965,64	943,69	40
		$\alpha_1$	953,42	953,93	955,28	51
		$\beta_1$	762,59	763,16	1194,08	57
		$\beta_2$	791,08	791,56	1151,26	48
25	92	U $L_{\alpha_2}$	651,03	651,51	1398,85	48
		$\alpha_1$	920,14	920,65	989,81	51
		$\beta_1$	908,33	908,91	1002,60	58
		$\beta_2$	718,07	718,55	1239,35	48
25	92	$\gamma_1$	752,68	753,23	1209,80	55
		$\gamma_1$	612,83	613,32	1468,14	49

Mittl. Abweich. 54

Die Tab. 1 zeigt also in der  $K$ -Serie eine gute Übereinstimmung meiner Messungen mit denjenigen des Lunder Institutes. Die mittlere Abweichung von den Siegbahn'schen Werten in der  $K$ -Serie beträgt  $\pm 2$ , (wenn wir den drei Linien  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\beta_1$  nicht die gleichen Gewichte zulegen, sondern berücksichtigen, daß die  $\beta_1$ -Linie erstens diffus und zweitens nur halb so intensiv wie die  $\alpha_1$ -Linie ist. Wir wollen die Abweichungen der  $\beta$ -Linien also nur zur Hälfte anrechnen. Die Abweichungen der  $\beta_2$ -Linien wollen wir nur  $\frac{2}{3}$  berücksichtigen.) Dagegen tritt in der  $L$ -Serie eine nahezu konstante Differenz auf, und zwar beträgt diese durchschnittlich 0,54 X.-E. Diese konstante Differenz tritt auch schon bei A. Weber und K. Lang in ihren Messungen der  $L$ -Serie gegenüber Siegbahn auf. Wie ist sie zu erklären? Wie auch von anderer Seite bemerkt worden ist, könnte man zunächst an eine Eigentümlichkeit der Schneidenmethode denken. Indessen zeigt eine nähere Prüfung, daß dies nicht zutrifft. Die Richtigkeit der Justierung läßt sich leicht prüfen, indem man gleichzeitig Linien der  $L$ - und  $K$ -Serie, die zwischen den angenommenen Normalen liegen, photographiert und durch beide Serien ausmißt. Dadurch ändert sich am Resultate nichts. Daß nicht etwa eine einseitige Linienverbreiterung die Ursache ist, läßt sich auch zeigen. Zwar sind die Linien der  $L$ -Serie etwas breiter als die der  $K$ -Serie (bei gleichen Schwärzungen), wie aus den folgenden Messungen hervorgeht, die zugleich die erreichbare Genauigkeit zeigt.

Cu $K\alpha$ , 0,042	W $L\alpha$ , 0,049	W $L\beta_1$ , 0,048	W $L\beta_2$ , 0,045
0,039	0,047	0,045	0,044
0,040	0,046	0,044	0,045
0,041	0,047	0,044	0,043
0,039	0,048	0,043	0,042
0,038	0,045	0,044	0,044
0,040	0,044	0,042	0,044
0,041	0,045	0,043	0,045
Mittel 0,040	0,0465	0,0435	0,044
Cu $K\alpha$ , 0,038	Cu $K\beta$ , 0,045	Ta $L\beta_1$ , 0,048	Ta $L\beta_2$ , 0,042
0,037	0,047	0,047	0,044
0,040	0,048	0,045	0,043
0,039	0,045	0,046	0,045
0,037	0,046	0,047	0,045
0,038	0,045	0,039	0,044
0,040	0,046	0,043	0,045
0,037	0,044	0,046	0,042
Mittel 0,038	0,046	0,045	0,044

Für alle Elemente stehen die Linienbreiten der *L*-Linien für gleiche Schwärzungen in demselben Verhältnis zur  $\text{CuK}_{\alpha_1}$ -Linie wie für Tantal und Wolfram. Allerdings scheint die Linienbreite mit wachsender Wellenlänge allmählich zuzunehmen. Genauer kann ich aber darüber noch nicht mitteilen, da ich nur bis Samarium (2500 X.-E.) vorgedrungen bin. Jedenfalls ist die Linienbreite der *L*-Serie in dem untersuchten Bereich (500—2500 X.-E.) höchstens um 0,008 mm größer als die der *K*-Linien. Wie schon erwähnt, wurden bei meinen Messungen sämtliche Linien auf die langwellige Kante des Schwärzungsmaximums eingestellt, entsprechend der Besonderheit der Schneidenmethode. Allein selbst wenn eine einseitige Linienverbreiterung in Betracht käme und die Hälfte der Verbreiterung ganz in die Messung einging, was nicht der Fall ist, so ergäbe sich immerhin für  $\lambda$  im Maximum nur ein Unterschied von  $4 \cdot 0,04 \text{ X.-E.} = 0,16 \text{ X.-E.}$ , da  $1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  auf der Platte 0,04 X.-E. ausmacht. Übrigens wurden sowohl die *K*-Serie als auch die *L*-Serie im hiesigen Institut mit dem Mikrophotometer photometriert. Die Photometerkurven, die ich Hrn. Sewig verdanke, zeigen zwar, daß der optische Schwerpunkt der Linien näher an der langwelligen Kante liegt, allein dies gilt ebenso für die *K*-Serie wie für die *L*-Serie.

Zu meinem Ergebnis paßt, daß Hr. Weber im physik. Institut der Aachener Hochschule mit einem anderen Schneidenspektrographen verschiedentlich Aufnahmen der *K*- und *L*-Serie gemacht hat. Nach jener Mitteilung hat er genau dasselbe gefunden wie ich.

Bonn, im März 1926.

(Eingegangen 20. April 1926)



# 7. Zeemaneffekt am Bogen- und Funkenspektrum von Molybdän; von E. Wilhelmy

(Mitteilung aus dem physikalischen Institut der Universität Bonn)

(Hierzu Tafel V und VI)

In der zweiten Ordnung eines großen Rowlandgitters wurden von 2500—6000 L.-Å. bei einer Feldstärke von 34000 Gauss Zeemanaufnahmen des Molybdän-Bogen- und Funkenspektrums gemacht. Im Bogenspektrum wurden die von Catalán gefundenen Multipletts, soweit sie beobachtet werden konnten, sämtlich bestätigt, zwei Gruppen, die Kiess angibt, berichtigt. Im Funkenspektrum wurden neue Terme aufgefunden, die sich in Übereinstimmung befinden mit den Vorstellungen über die Beziehungen zwischen dem Spektrum des neutralen und des einfach ionisierten Atoms.

Die Struktur des Molybdän**bogenspektrums** ist schon von verschiedener Seite untersucht worden. Zuerst hat Jack<sup>1)</sup> darin eine große Zahl von Zeemantypen gemessen und mit deren Hilfe nach Gesetzmäßigkeiten gesucht. Linien mit gleicher magnetischer Zerlegung wollte er zu Serien zusammenfassen. Der Versuch ist begreiflicherweise nicht geglückt. Vor einiger Zeit fand Catalán<sup>2)</sup> im Spektrum des neutralen Molybdän eine Anzahl Multipletts erster Stufe, deren Realität durch die in den verschiedenen Gruppen sich wiederholenden gleichen Wellenzahldifferenzen sowie die Befriedigung der Intervallregel und der Intensitätsregel bekräftigt war. Ungefähr gleichzeitig mit Catalán veröffentlichte Kiess<sup>3)</sup> eine Arbeit über denselben Gegenstand. Seine Resultate weichen zum Teil erheblich von denen Cataláns ab. Wenn auch den Angaben Cataláns nach den verschiedenen spektroskopischen

1) Dissertation, Göttingen 1909 und Ann. d. Phys. 28. S. 1032. 1909.

2) Annales de la Sociedad Española de Física y Química 21. S. 213. 1923.

3) Scient. Pap. No. 474.

Kriterien zu urteilen ein höherer Grad von Sicherheit zuzusprechen ist, so dürfte doch eine eindeutige Entscheidung, wie sie der Zeemaneffekt auf Grund der Landéschen Theorie<sup>1)</sup> liefert, nicht unerwünscht sein. Es kommt noch hinzu, daß die genannten Kriterien ja auch keine völlige Gewähr für die Richtigkeit des Gefundenen geben.

In linienreichen Spektren ist es geradezu wahrscheinlich, daß „Pseudomultipletts“ auftreten, in denen die Linien nur in einem arithmetischen Zusammenhang stehen, ohne physikalisch miteinander verknüpft zu sein. Dieser Fall ist bei Kiess in der Tat mehrfach eingetreten und durch den Zeemaneffekt aufgezeigt worden.

Catalán<sup>2)</sup> hat weiterhin die Messungen von Jack nach modernen Richtlinien durchgesehen und zum Vergleich mit seinen eigenen Resultaten herangezogen. Das Ergebnis dabei war folgendes: Jack gibt etwa 300 kompliziertere Typen an; im gleichen Wellenlängengebiet liegen rund 80 von Catalán eingeordnete Linien. Nur 15 von diesen befinden sich in einer einigermaßen befriedigenden Übereinstimmung. Diese auffallend kleine Zahl läßt sich aus zwei Umständen erklären. Einmal waren die experimentellen Hilfsmittel Jacks verhältnismäßig bescheiden. Er arbeitete mit einem Feld von 24000 Gauss und einem Lichtbogen unter Atmosphärendruck. Heute kommen wir mit der Feldstärke viel weiter und besitzen in der Vakuumbogenlampe von Back<sup>3)</sup> eine vorzüglich geeignete Lichtquelle. Dann aber standen Jack eben noch nicht die theoretischen Gesichtspunkte und Regeln zu Gebote, die von Back und Landé<sup>4)</sup> gefunden wurden und uns jetzt selbst dann in vielen Fällen noch eine richtige Auswertung der beobachteten Typen ermöglichen, wenn im Plattenbild nicht alle Komponenten völlig getrennt oder mit hinreichender Intensität erscheinen.

Über den Bau des Funkenspektrums von Molybdän ist noch nichts bekannt. Nun hat gerade die Frage nach den Beziehungen zwischen den Spektren des neutralen und des

1) Ztschr. f. Phys. 15. S. 189. 1923.

2) A. a. O., S. 527.

3) Ann. d. Phys. 70. S. 333. 1923.

4) Ztschr. f. Phys. 15. S. 189 und 206. 1923.

ionisierten Atoms in jüngerer Zeit erhebliches Interesse gewonnen. Erst erfuhr der Rydbergsche Satz vom Wechsel zwischen Dubletts und Triplets im periodischen System der Elemente eine Korrektur durch den Verschiebungssatz von Sommerfeld und Kossel<sup>1)</sup>, nach dem allgemeiner gerade und ungerade Vielfachheiten sich ablösen, wenn die Zahl der den Kern umfahrenden Elektronen um Eins vermehrt oder vermindert wird. Das Heisenberg-Landésche Verzweigungsprinzip<sup>2)</sup> spezialisierte diesen Satz noch weiter durch die Feststellung, daß die Multiplizitäten sich beim Übergang vom Bogen- zum Funkenspektrum in die beiden benachbarten aufspalten, z. B. Quintetts in Quartetts und Sextetts. Im Anschluß an eine Arbeit von Russel und Saunders über die Erdalkalispektren<sup>3)</sup> fand W. Pauli jr. einen Weg, aus der Anordnung der Elektronen im ionisierten Atom die möglichen Quantenzahlen für die Bahnen eines neu eingefangenen abzuleiten.<sup>4)</sup> Heisenberg<sup>5)</sup> gelang es dann, diese Zahlen und die Multipletts in den betreffenden Linienspektren einander zuzuordnen. Hund<sup>6)</sup> prüfte diesen Zusammenhang in vielen Fällen mit der Erfahrung und bestätigte ihn meist.

Das Ziel dieser Arbeit ist demnach ein doppeltes:

Mit Hilfe des Zeemaneffektes

1. Die schon gefundenen Gesetzmäßigkeiten im Molybdänbogenspektrum nachzuprüfen.

2. Einen Einblick in den Bau des Molybdänfunkenspektrums zu gewinnen.

#### Die Apparatur

Eine große Konkavgitteraufstellung wurde eigens für Zeemaneffektuntersuchungen im Keller des Institutes eingerichtet. Das Gitter — mit 110000 Furchen — fand seinen Platz in einer schwarz gestrichenen Nische der Grundmauer. Vier starke Betonpfeiler reichten durch den mit passenden Ausschnitten versehenen Holzboden auf isolierten Betongrund

1) Verh. d. D. Phys. Ges. Jahrg. 21. 1919.

2) Ztschr. f. Phys. 25. S. 279. 1924.

3) Astrophys. Journ. 61. S. 38. 1925.

4) Ztschr. f. Phys. 31. S. 765. 1925.

5) Ztschr. f. Phys. 32. S. 841. 1925.

6) Ztschr. f. Phys. 33. S. 345 und 34. S. 296. 1925.

und trugen oben drei schräg aneinandergefügte Marmorplatten, die der Krümmung des Rowlandschen Kreises folgten. Am einen Ende war der Spalt aufgeschraubt, während daneben eine Reihe von Kassetten an verschiedenen Stellen — je nach dem erwünschten Spektralgebiet — justiert werden konnten. Ein Koordinatensystem, auf den Marmorplatten aufgezeichnet, erleichterte dies sehr. Es war so nach der Grobeinstellung immer nur noch eine Justierungsaufnahme auf schräggestellten Platten erforderlich. Über die Kassetten wurden bei den Aufnahmen schwarz lackierte Blechkästen gestülpt, die nur nach der dem Gitter zugewandten Seite einen Streifen von der Breite der photographischen Platten freiließen und so im Verein mit einem dunklen Vorhang, der das eigentliche Spektroskop von der Lichtquelle und ihrem Zubehör abschloß, die Gefahr des Schleierns der Platten infolge von reflektiertem Licht auf ein Mindestmaß herabdrückte.

Das magnetische Feld erzeugte ein großer Weisscher Elektromagnet älterer Bauart. Die aus Kupferband gewundenen Scheiben der Wicklung sind von einem mit Vaselineöl gefüllten Gehäuse umgeben. Die Kühlung erfolgt indirekt dadurch, daß dem Öl durch eine außen um die Spulen geführte Kühlschlange, die vom Wasser durchströmt ist, die Wärme entzogen wird. Bei einem Polabstand von 4 mm, einem Poldurchmesser von 10 mm und einer Belastung von 16 Amp. betrug die Feldstärke 35000 Gauss. Da die Spulen einen Widerstand von etwa 13 Ohm besitzen, wurden unter diesen Verhältnissen stündlich 3000 Cal entwickelt. Dieser gewaltigen Wärmeproduktion ist die Kühlung auf die Dauer nicht gewachsen. Außerdem stieg dabei der Widerstand der Wicklung so rasch an, daß nach einiger Zeit die Spannung trotz Ausschaltens des ganzen Regulierwiderstandes nicht mehr zur Aufrechterhaltung des Stromes genügte. Es wurde daher bei längeren Belichtungszeiten nur mit 12 Amp. gearbeitet. Dann entstanden 1600 Cal pro Stunde und die Feldstärke erreichte immerhin noch den Betrag von 34000 Gauss.

Als Lichtquelle kam natürlich nur der Vakuumabreißbogen in Betracht, wie ihn Back<sup>1)</sup> zuerst in die Zeemaneffektforschung eingeführt hat. Das Lampengehäuse bildete ein mit zwei

1) Ann. d. Phys. 70. S. 333. 1923.

Fenstern, zwei Schliffen und einem Rohrstutzen zum Evakuieren versehener Messingzylinder, der in ringförmige Nuten an den Polen des Magneten eingepaßt und unter Einlage von Gummiringen gasdicht angepreßt wurde. Durch die Schliffe wurden die Elektrodenhalter eingeführt, ein fester und ein beweglicher, dessen Achse so gelagert war, daß die Bewegung zwischen den Polen parallel zu den Kraftlinien erfolgte. Ein kleiner Elektromotor übertrug mittels eines Bowdenzuges die Bewegung auf die Abreißelektrode. Das wesentliche bei der Verwendung der „Backlampe“ ist die Umgehung von Poldurchbohrungen, welche die Stärke und Homogenität des Feldes sehr beeinträchtigen würden.

Als Elektrodenmaterial diente in Streifen geschnittenes 0,4 mm dickes Molybdänblech. Der Bogen wurde mit 150 Volt Spannung unter Vorschaltung von etwa 30 Ohm Widerstand betrieben. Die Klemmspannung betrug ungefähr 30 Volt. Die Höhe des Vakuums wurde auf 40 mm Hg eingestellt. Unter diesen Bedingungen brannte der Bogen stabil und ohne zu wandern zentral im Feld. Bei geringerem Druck oder niedriger Spannung erlosch der Bogen. Stärkere Belastung gefährdete die zur Isolation auf die Polen geklebten Glimmerstückchen. Nur zum Zünden des Bogens mußte einige Augenblicke lang die Abreißvorrichtung in Gang gesetzt werden.

Ein Kalkspatkristall trennte die parallel bzw. senkrecht zum Felde polarisierten Komponenten.

Für die Lichtstärke der Apparatur mag folgendes als Anhalt gelten: Die gewöhnlich als Feldnormalen benutzten Zinklinien 4680, 4722, 4810 Å.-E. waren in zweiter Ordnung in 5 Minuten richtig exponiert. Außer diesen Linien wurden noch bekannte Typen aus den Molybdänmultipletts, soweit sie einwandfrei meßbar waren, zur Bestimmung der Feldstärke herangezogen. So war der mittlere Fehler  $< |80|$  Gauss.

Das Auflösungsvermögen betrug bis zu 120 000 (II. Ordn.).<sup>1)</sup> Diese Zahl wird z. B. erreicht bei der Aufspaltung der Linie 3680,81 I.-Å. Der mittlere Abstand benachbarter Komponenten ist hier 0,03 Å.-E, also  $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 120\,000$ .

1) Das Auflösungsvermögen ist hier durch das grobe Korn der Ultrarapidplatten begrenzt.

Das gesamte photographierte Gebiet reicht von 2500 bis 6000 I.-Å. Den Belichtungszeiten war durch die begrenzte Haltbarkeit der Glimmerisolation eine Schranke gesetzt. Infolge der großen Hitze des Lichtbogens (Schmelzpunkt von Mo 2500°) schlugen die Glimmerstückchen oft nach 2 Stunden durch. Aus diesem Grunde wurden die Aufnahmen meistens in der zweiten Gitterordnung gemacht, nur die starken kurzwelligen Linien erschienen auch in der dritten Ordnung. Die Expositionszeiten wechselten von 10 Minuten bis 2 Stunden.

### Ergebnisse

Zu den Bezeichnungen sind einige Erläuterungen erforderlich: Die Buchstaben *S*, *P*, *D*, *F*, ... entsprechen den sogenannten „*l*-Zahlen“. Die Quantenzahl *l* mißt den resultierenden Drehimpuls der äußeren Elektronen. *l* ist gleich 1, 2, 3, 4, ... für *S*, *P*, *D*, *F*, ... Der links oben vor den Buchstaben gesetzte Index gibt die Vielfachheit des Terms an, z. B. bedeutet <sup>5</sup>*D* einen Quintett-*D*-Term. Wir können diesen Index in den meisten Fällen entbehren, indem wir vor die betreffenden Tabellen die Bemerkung setzen: Quintettsystem, Sextettsystem usw. Der rechts unten an den Buchstaben gefügte Index ist die innere Quantenzahl, die das Auswahlprinzip beherrscht und die erlaubten und verbotenen Kombinationen festlegt. Die Angaben über die Zeemaneffekte bringen in drei Reihen zuerst die ausgeglichenen Messungsergebnisse in Dezimalbruchform, dann die theoretischen Werte zum Vergleich in Dezimalbruchform und endlich die theoretischen Werte als Runge'sche Bruchreihen. In runde Klammern gesetzte Zahlen bedeuten parallel polarisierte, fett gedruckte Zahlen stärkste Komponenten.

### I. Das Bogenspektrum

Eine Anzahl Multipletts ist schon von Catalán und Kiess gefunden worden. Ihre Strukturen werden durch die Schemata 1—7 in der endgültig gesicherten Fassung veranschaulicht.

Soweit die Ergebnisse der beiden Forscher miteinander übereinstimmen, sind sie in Tabelle 1—4 zusammengestellt.

Schema 1—4

Quintettsystem

1 $S_2$	
2 $P_3$	5506,54
$\Delta \nu$ 121,67	
2 $P_2$	5533,06
$\Delta \nu$ 86,99	
2 $P_1$	5570,57

Septettsystem

1 $S_3$	
2 $P_4$	3798,41
$\Delta \nu$ 448,57	
2 $P_3$	3864,30
$\Delta \nu$ 257,55	
2 $P_2$	3903,11

1 $S_3$	
2 $P'_4$	3132,70
$\Delta \nu$ 379,90	
2 $P'_3$	3170,46
$\Delta \nu$ 233,35	
2 $P'_2$	3194,11

 $D_0 \Delta \nu$  176     $D_1 \Delta \nu$  311     $D_2 \Delta \nu$  404     $D_3 \Delta \nu$  487     $D_4$ 

$P_1$	5632,48	5689,22	5791,88		
$\Delta \nu$ 87					
$P_2$		5650,15	5751,42	5888,32	
$\Delta \nu$ 121					
$P_3$			5722,78	5858,28	6030,65
$\bar{P}_1$	4558,29	4595,32	4662,11		
$\Delta \nu$ 400					
$\bar{P}_2$		4512,35	4576,67	4662,94	
$\Delta \nu$ 656					
$\bar{P}_3$			4443,26	4524,50	4626,65
$F_1$	4294,03	4326,90	4386,04		
$\Delta \nu$ 186					
$F_2$		4292,37	4350,52	4428,42	
$\Delta \nu$ 305					
$F_3$			4293,42	4369,25	4464,23
$\Delta \nu$ 429					
$F_4$				4288,82	4380,49
$\Delta \nu$ 549					
$F_5$					4277,49
$\bar{D}_0$	3825,50 <sup>1)</sup>	3851,54			
$\Delta \nu$ 193					
$\bar{D}_1$	3797,42	3823,13	3869,23		
$\Delta \nu$ 286					
$\bar{D}_2$		3781,78	3826,85	3886,98	
$\Delta \nu$ 389					
$\bar{D}_3$			3770,60	3829,02	3901,93
$\Delta \nu$ 454					
$\bar{D}_4$				3763,50	3833,88

1) Vgl. die Bemerkungen vor Tabelle 7.

Tabelle 1

	$\lambda$ in I.-Å.	Deutung von	
		Catalán	Kiess
1	5506,54	$1 S_2 - 2 P_3$	$1 S_2 - 2 P_3$
2	5533,06	$1 S_2 - 2 P_3$	$1 S_2 - 2 P_3$
3	5570,57	$1 S_2 - 2 P_1$	$1 S_2 - 2 P_1$

Tabelle 2

	$\lambda$ in I.-Å.	Deutung von	
		Catalán	Kiess
4	3798,41	$1 S_2 - 2 P_4$	$1 S_2 - 2 P_4$
5	3864,30	$1 S_2 - 2 P_3$	$1 S_2 - 2 P_3$
6	3903,11	$1 S_2 - 2 P_3$	$1 S_2 - 2 P_3$

Tabelle 3

	$\lambda$ in I.-Å.	Deutung von	
		Catalán	Kiess
7	3132,70	$1 S_2 - 2 P_3'$	$1 S_2 - 2 P_3'$
8	3170,46	$1 S_2 - 2 P_3'$	$1 S_2 - 2 P_3'$
9	3194,11	$1 S_2 - 2 P_3'$	$1 S_2 - 2 P_3'$

Tabelle 4

	$\lambda$ in I.-Å.	Deutung von	
		Catalán	Kiess
10	5632,48	$P_1 D_0$	$P_1 D_0$
11	5650,15	$P_2 D_1$	$P_2 D_1$
12	5689,22	$P_1 D_1$	$P_1 D_1$
13	5722,78	$P_3 D_3$	$P_3 D_3$
14	5751,42	$P_2 D_2$	$P_2 D_2$
15	5791,88	$P_1 D_3$	$P_1 D_3$
16	5858,28	$P_3 D_3$	$P_3 D_3$
17	5888,32	$P_2 D_3$	$P_2 D_3$
18	6030,65	$P_3 D_4$	$P_3 D_4$

## Die zugehörigen Zeemaneffekte

- 5506,54  
 beobachtet:  $\pm (0) (0,333) (0,667) \mathbf{1,000} \ 1,333 \ 1,667 \ 2,000 \ 2,333$   
 berechnet:  $\pm (0) (0,333) (0,667) \mathbf{1,000} \ 1,333 \ 1,667 \ 2,000 \ 2,333$   
 $\pm (0) (1) (2) \mathbf{3} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 : 3$   
 Termkombination:  $S_2 P_3$
- 5533,06  
 beobachtet:  $\pm (0,168) (\mathbf{0,334}) \ 1,670 \ \mathbf{1,838} \ \mathbf{2,006} \ 2,173$   
 berechnet:  $\pm (0,167) (\mathbf{0,333}) \ 1,667 \ \mathbf{1,833} \ \mathbf{2,000} \ 2,167$   
 $\pm (1) (2) \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 : 6$   
 Termkombination:  $S_2 P_3$
- 5570,57  
 beobachtet:  $\pm (0) (0,500) \ \mathbf{1,500} \ 2,000 \ 2,500$   
 berechnet:  $\pm (0) (0,500) \ \mathbf{1,500} \ 2,000 \ 2,500$   
 $\pm (0) (1) \mathbf{3} \ 4 \ 5 : 2$   
 Termkombination:  $S_1 P_1$
- 3798,41  
 beobachtet:  $\pm (0) (0,248) (0,495) (0,743) \mathbf{0,990} \ 1,238 \ 1,485 \ 1,733$   
 berechnet:  $\pm (0) (0,250) (0,500) (0,750) \mathbf{1,000} \ 1,250 \ 1,500 \ 1,750$   
 beobachtet:  $1,980 \ 2,203 \ 2,475$   
 berechnet:  $2,000 \ 2,250 \ 2,500$   
 $\pm (0) (1) (2) (3) \mathbf{4} \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 : 4$   
 Termkombination:  $S_3 P_4$
- 3864,30  
 beobachtet: nicht aufgelöst, doch qualitativ in Übereinstimmung mit dem theoretischen Bild  
 berechnet:  $\pm (1) (3) (\mathbf{3}) \ 21 \ 22 \ \mathbf{23} \ \mathbf{24} \ 25 \ 26 : 12$   
 Termkombination:  $S_3 P_3$



6. 3903,11

beobachtet:	± (0)	(0,333)	(0,667)	<b>1,333</b>	1,667	2,000	2,333	2,667
berechnet:	± (0)	(0,333)	(0,667)	<b>1,333</b>	1,667	2,000	2,333	2,667
	± (0)	(1)	(2)	<b>4</b>	5	6	7	8:3

Termkombination:  $S_3 P_2$

7. 3132,70

beobachtet:	± (0)	(0,252)	(0,505)	(0,758)	<b>1,010</b>	1,263	1,515	1,768
berechnet:	± (0)	(0,250)	(0,500)	(0,750)	<b>1,000</b>	1,250	1,500	1,750
beobachtet:		2,020	2,247	2,525				
berechnet:		2,000	2,250	2,500				
	± (0)	(1)	(2)	(3)	<b>4</b>	5	6	7 8 9 10:4

Termkombination:  $S_3 P_4$

8. 3170,46

3170,46								
beobachtet:	wie bei Linie	3864,30						
berechnet:	"	"	"	"				

9. 3194,11

beobachtet:	± (0)	(0,327)	(0,647)	<b>1,302</b>	1,615	1,940	2,271	2,591
berechnet:	± (0)	(0,333)	(0,667)	<b>1,333</b>	1,667	2,000	2,333	2,667
	± (0)	(1)	(2)	<b>4</b>	5	6	7	8:3

Termkombination:  $S_3 P_2$

10. 5632,48

beobachtet:	± (0)	2,51						
berechnet:	± (0)	2,50						
	± (0)	5:2						

Termkombination:  $P_1 D_0$

11. 5650,15

beobachtet:	± (0)	(0,334)	<b>1,505</b>	1,838	2,173			
berechnet:	± (0)	(0,333)	<b>1,500</b>	1,833	2,167			
	± (0)	(2)	9	11	13:6			

Termkombination:  $P_2 D_1$

12. 5689,22

beobachtet:	±	(0,990)	1,485	2,475				
berechnet:	±	(1,000)	1,500	2,500				
	± (2)	3	5:2					

Termkombination:  $P_1 D_1$

13. 5722,78

beobachtet:	± (0)	(0,17)	(0,34)	—	—	—	—	2,0
		(Sehr schwach, daher Messung ungenau)						
berechnet:	± (0)	(0,167)	(0,333)	1,333	1,500	1,667	1,833	2,000
	± (0)	(1)	(2)	8	9	10	11	12:6

Termkombination:  $P_1 D_2$

14. 5751,42

beobachtet:	±	(0,332)	<b>(0,664)</b>	1,163	<b>1,494</b>	1,826	2,159	
berechnet:	±	(0,333)	<b>(0,667)</b>	1,167	<b>1,500</b>	1,833	2,167	
	± (2)	(4)	7	9	11	13:6		

Termkombination:  $P_1 D_1$

15. 5791,88

beobachtet:  $\pm (0)$  0,503 (1,006) 1,509 2,515berechnet:  $\pm (0)$  0,500 (1,000) 1,500 2,500 $\pm (0)$  1 (2) 3 5:2Termkombination:  $P_1 D_2$ 

16. und 17. sind zu schwach zum Messen. Der Typus ist erkennbar und entspricht dem theoretisch geforderten

18. 6030,65

beobachtet:  $\pm$  — — — — 10 — — — — —berechnet:  $\pm (0)$  (1) (2) (3) 6 7 8 9 10 11 12:6

Nur in der ersten Ordnung beobachtet. Aufspaltung in 21 Komponenten gerade noch merkbar

Termkombination:  $P_3 D_4$ 

Im nächsten Multiplett (Tab. 5) gehen die Deutungen von Catalán und Kiess gänzlich auseinander. In der einen Richtung hat die Gruppe die gleichen  $\Delta\nu$  wie die  $D$ -Terme aus der Gruppe von Tab. 4. Mit diesem Niveau kombiniert nach Catalán ein dreifaches, also ein  $P$ -Term. Kiess findet an beiden Enden noch je zwei Linien mehr, die den Intervallen nach sehr genau in das Schema passen. Das gäbe einen fünffachen Term, und Kiess bezeichnet dementsprechend das Multiplett als  $D - D$ -Kombination. Aber schon die Intensitätsregel ist nicht erfüllt. Der Zeemaneffekt müßte dazu für alle Linien der Gruppe vom Typus (0) 3:2 sein. Die beobachteten Aufspaltungen bestätigen die Anordnung Cataláns (Quintettsystem).

Tabelle 5

	$\lambda$ in L.-Å.	Deutung von			$\lambda$ in L.-Å.	Deutung von	
		Catalán	Kiess			Catalán	Kiess
1	4443,26	$P_2 D_3$	$D_2 D_2$	6	4595,32	$P_1 D_1$	$D_1 D_1$
2	4512,35	$P_2 D_1$	$D_2 D_1$	7	4626,65	$P_2 D_4$	$D_2 D_1$
3	4524,50	$P_2 D_3$	$D_3 D_3$	8	4662,11	$P_1 D_2$	$D_1 D_3$
4	4558,29	$P_1 D_0$	$D_1 D_0$	9	4662,94	$P_2 D_3$	$D_1 D_3$
5	4576,67	$P_2 D_2$	$D_2 D_2$				

Die zugehörigen Zeemaneffekte:

1. 4443,26

Überlagert

2. 4512,35

Wegen Überlagerung nicht sicher auszumessen. Qualitativ in Übereinstimmung mit den geforderten Eigenschaften.

3. 4524,50

beobachtet:	±	(0,166)	(0,332)	(0,498)	1,163	1,327	1,493	1,660
berechnet:	±	(0,167)	(0,334)	(0,500)	1,167	1,333	1,500	1,667
beobachtet:	±	1,824	1,990					
berechnet:	±	1,833	2,000					
	± (1)	(2)	(3)	7	8	9	10	11 12:6

Termkombination:  $P_3 D_3$

4. 4558,29

beobachtet:	± (0)	2,500
berechnet:	± (0)	2,500
	± (0)	5:2

Termkombination:  $P_1 D_0$

5. 4576,67

beobachtet:	±	(0,333)	(0,667)	1,167	1,500	1,833	2,167
berechnet:	±	(0,333)	(0,667)	1,167	1,500	1,833	2,167
	± (2)	(4)	7	9	11	13:6	

Termkombination:  $P_3 D_3$

6. 4595,32

beobachtet:	±	(1,00)	1,50	2,50
berechnet:	±	(1,00)	1,50	2,50
	± (2)	3	5:2	

Termkombination:  $P_1 D_1$

7. 4626,65

beobachtet:	± (0)	(0,163)	(0,327)	(0,488)	0,975	—	—	—
berechnet:	± (0)	(0,167)	(0,333)	(0,500)	1,000	1,167	1,333	1,500
beobachtet:	±	—	—	—				
berechnet:	±	1,667	1,833	2,000				
	± (0)	(1)	(2)	(3)	6	7	8	9 10 11 12:6

Auflösung der  $\sigma$ -Komponenten nur angedeutet.

Termkombination:  $P_3 D_3$

8. 4662,11

beobachtet: Wegen Überlagerung mit den Komponenten von 4662,94 nur qualitativ bestätigt

Termkombination:  $P_1 D_1$

9. 4662,92

beobachtet:	± (0)	(0,324)	(0,650)	0,809	1,136	1,455	1,780	2,111
berechnet:	± (0)	(0,333)	(0,667)	0,833	1,167	1,500	1,833	2,167
	± (0)	(2)	(4)	5	7	9	11	13:6

Wegen der Überlagerung mit der vorhergehenden Linie ist nur die eine Halbseite gemessen.

Termkombination:  $P_3 D_3$

Ein weiteres Multiplett ist nur bei Catalán angegeben. Es gehört ebenfalls zum Quintettsystem.

Tabelle 6.

	in I.-Å.	Catalán		in I.-Å.	Catalán
1	4277,49	$D_1 F_2$	7	4350,52	$D_2 F_3$
2	4288,82	$D_3 F_4$	8	4369,25	$D_3 F_3$
3	4292,37	$D_1 F_3$	9	4380,49	$D_4 F_4$
4	4293,42	$D_2 F_3$	10	4386,04	$D_3 F_1$
5	4294,03	$D_0 F_1$	11	4428,42	$D_3 F_3$
6	4326,90	$D_1 F_1$	12	4464,23 (ber.)	$D_1 F_3$

1. 4277,49  
beobachtet:  $\pm$  — — — — — 1,0 — — — — —  
berechnet:  $\pm$  (0) (1) (2) (3) (4) 10 11 12 13 14 15 16 17 18:10  
Der Abstand 1:10 ist natürlich nicht aufgelöst. Aber  
der Abstand der stärksten  $\sigma$ -Komponenten ist meßbar.  
Termkombination:  $D_4 F_5$

2. 4238,82  
beobachtet:  $\pm$  (0) — — — — — 0,9 — — — — —  
berechnet:  $\pm$  (0) (3) (6) (9) 18 21 24 27 30 33 36:20  
Die Auflösung ist noch merkbar, aber nicht mehr  
genau zu messen  
Termkombination:  $D_2 F_4$

3. 4292,37  
beobachtet:  $\pm$  (0) (0,500) 0,500 1,000 1,500  
berechnet:  $\pm$  (0) (0,500) 0,500 1,000 1,500  
 $\pm$  (0) (1) 2 3:2  
Termkombination:  $D_1 F_3$

4. 4293,42  
beobachtet:  $\pm$  (0) (0,252) (0,504) 0,756 1,008 1,260 1,512 1,764  
berechnet:  $\pm$  (0) (0,250) (0,500) 0,750 1,000 1,250 1,500 1,750  
 $\pm$  (0) (1) (2) 3 4 5 6 7:4  
Termkombination:  $D_4 F_5$

5. 4294,03  
beobachtet:  $\pm$  (0) 0  
berechnet:  $\pm$  (0) 0 Termkombination:  $D_0 F_1$

6. 4326,90  
beobachtet:  $\pm$  (1,503) 0 1,503  
berechnet:  $\pm$  (1,500) 0 1,503  
 $\pm$  (3) 0 3:2  
Termkombination:  $D_1 F_1$

7. 4350,52  
beobachtet:  $\pm$  (0,500) (0,999) 0,500 0,999 1,499 1,998  
berechnet:  $\pm$  (0,500) (1,000) 0,500 1,000 1,500 2,000  
 $\pm$  (1) (2) (3) 1 2 3 4:2  
Termkombination:  $D_3 F_4$

8. 4369,25  
beobachtet:  $\pm$  (0,243) (0,485) (0,730) 0,730 0,970 1,214 1,455  
berechnet:  $\pm$  (0,250) (0,500) (0,750) 0,750 1,000 1,250 1,500  
beobachtet:  $\pm$  1,700 1,940  
berechnet:  $\pm$  1,750 2,000  
 $\pm$  (1) (2) (3) 3 4 5 6 7 8:4  
Termkombination:  $D_3 F_5$

9. 4380,49

beobachtet:  $\pm$  — — — (0,6) — — — — 1,4 — — —  
berechnet:  $\pm$  (3) (6) (9) (12) 18 21 24 27 30 33 36 39:20

Termkombination:  $D_4 F_4$ 

10. und 11. sind im Zeemaneffekt zu schwach.

12. ist auch von Catalán nur durch Extrapolation ermittelt.

Von Kiess wird eine  $D D$ -Gruppe mitgeteilt, an der wir eine Korrektur vornehmen müssen. Nach dem Auswahlprinzip für heteromorphe Terme von Laporte<sup>1)</sup> ist der Übergang  $D_0 \bar{D}_0$  verboten. Gerade an der Stelle, die dieser Kombination entspricht, liegt die Linie 3825,50 I.-Å. Es fragt sich nun, ob der verbotene Quantensprung wirklich auftritt, oder ob wir es mit einer fremden Linie zu tun haben, die nur zufällig den Intervallen nach in das Multiplett paßt. Die Entscheidung ist im Zeemaneffekt sehr einfach. Die Theorie verlangt, daß sämtliche Glieder der Gruppe die Aufspaltung (0) 3:2 besitzen müssen. Alle Linien außer 3825,50 I.-Å., die die Zerlegung (0) 0,756 hat, zeigen den Typus (0) 3:2. Die Linie ist also aus dem Schema von Kiess zu streichen (vgl. Tab. 7). Da die gleichen  $D$ -Differenzen vorkommen wie in den oben beschriebenen Multipletts, handelt es sich wieder um Quintett-Terme.

Die Messungen der Zeemaneffekte ergaben:

Tabelle 7

1. 3767,50 (0) 1,490	7. 3829,02 (0) 1,498
2. 3770,60 (0) 1,501	8. 3833,88 (0) 1,497
3. 3781,78 (0) 1,464	9. 3851,54 (0) 1,460 (überlagert)
4. 3797,42 (0) 1,498	10. 3869,23 (0) 1,500
5. 3823,18 (0) 1,515	11. 3886,98 (0) 1,507
6. 3826,85 (0) 1,499	12. 3901,98 (0) 1,498

Zwischen 3378 und 3461 I.-Å. bzw. 3156 und 3450 I.-Å. liegen nach Kiess noch zwei Gruppen. Es treten zwar wieder die alten  $D$ -Differenzen auf, aber nach den Zeemanaufspaltungen (in Tab. 9 zu finden) muß man die Liniengebilde als „Pseudomultipletts“ bezeichnen.

Ein neues  $D F$ -Multiplett konnte, wenigstens in seiner Diagonale, festgestellt werden. Die übrigen Glieder sind anscheinend bis auf eines zu schwach. Die eine der berechneten Differenzen hat auch die Größe  $D_4 - D_3$ . Hiernach und nach den Zeemaneffekten gehört die Gruppe zum Quintettsystem.

1) O. Laporte, Zeitschr. f. Phys. 35. 1924.

Tabelle 8

	$D_0$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$\bar{D}_4$
$F_1$	(6) 29 867 428 3347,17				
$F_2$		(6) 29 887 698 3344,90			
$F_3$			(8) 29 768 798 3358,26	(4) 29 364 493 3404,50	
$\Delta \nu$ 170,90				(6) 29 535 893 3384,80	
$F_4$					(10) 28 983 955 3449,20
$F_5$					

## Die zugehörigen Zeemaneffekte

- 3347,17  
beobachtet:  $\pm$  (0) 0  
berechnet:  $\pm$  (0) 0      Termkombination:  $D_0 F_1$
- 3344,90  
beobachtet:  $\pm$  (0) (0,503) **0,503** 1,006 1 509  
berechnet:  $\pm$  (0) (0,500) **0,500** 1,000 1,500  
 $\pm$  (0) (1) 2 3:2  
Termkombination:  $D_1 F_2$
- 3358,26  
beobachtet: (0) (0,243) (0,487) **0,725** 0,965 1,215 1,458 1,700  
berechnet: (0) (0,250) (0,500) **0,750** 1,000 1,250 1,500 1,750  
(0) (1) (2) **3** 4 5 6 7:4  
Der Typus ist etwas unsymmetrisch verzerrt und darum teilweise nicht ganz klar aufgelöst  
Termkombination:  $D_2 F_3$
- 3384,80  
beobachtet:  $\pm$  — — — — **0,8** — — — — —  
berechnet:  $\pm$  (0) (3) (6) (9) 18 21 24 27 30 33 36:  
Termkombination:  $D_3 F_4$
- 3404,50  
beobachtet:  $\pm$  (0,263) (0,526) (0,789) 0,789 1,060 **1,322** **1,590**  
berechnet:  $\pm$  (0,250) (0,500) (0,750) 0,750 1,000 **1,250** **1,500**  
beobachtet:  $\pm$  — — — — —  
berechnet:  $\pm$  1,750 2,000  
 $\pm$  (1) (2) (3) 3 4 5 6 7 8:4  
Termkombination:  $D_3 F_5$
- 3447,29  
beobachtet:  $\pm$  — — — — — **0,9** — — — — —  
berechnet:  $\pm$  (0) (1) (2) (3) (4) **10** 11 12 13 14 15 16 17 18:10  
Termkombination:  $D_4 F_5$

Nach den Vorstellungen, die in den oben zitierten Arbeiten von Pauli, Heisenberg und Hund entwickelt werden, müssen im Septettsystem noch *D*- und *F*-Form auftreten. Eine einzelne Kombination solcher Terme können wir angeben:

## Die Linie

3363,98 zeigt den Zeemaneffekt

beobachtet: (0) (0,502) (1,005) 0,502 1,005 1,507 2,010 2,501 daraus

berechnet: (0) (0,500) (1,000) 0,500 1,000 1,500 2,000 2,500

oder: (0) (1) (2) 1 2 3 4 5:2

Termkombination:  ${}^7D_3$   ${}^7F_3$ 

Bei folgenden Linien war keine sichere Termanalyse durchzuführen:

(Die in Klammern hinter den Wellenlängen stehenden Ziffern bedeuten die Grundtypen).

Tabelle 9

1.	3382,66	(7)	(0)	1,468						
2.	3422,47	(7)	(0)	1,512						
3.	3438,97	(7)	(0)	0,776						
4.	3443,42	(7)	(0)	1,500	(0)	3:2				
5.	3475,19	(3)	(1,116)	1,116	2,232					
6.	3571,41	(7)	(0)	1,134						
7.	3612,61	(7)	(0)	1,216	(0)	17:14				
8.	3626,86	(7)	(0)	1,500	(0)	3:2				
9.	3640,78	(7)	(0)	1,161	(0)	7:6				
10.	3677,64	(7)	(0)	1,570						
11.	3680,81	(?)	(— — —)	0,968	1,360	1,568	1,775	1,985	2,194	
12.	3695,14	(2)	(0)	(0,266)	(0,532)	0,055	0,321	0,587	0,853	1,119
13.	3717,04	(7)	(0)	1,060						
14.	3728,41	(7)	(0)	1,222						
15.	4105,24	(7)	(0)	1,02						
16.	4120,29	(1)	(0)	1,176	Pseudotypus m. ziemi. schmalen Komponenten					
17.	4232,82	(1)	(0)	1,09	"	"	"	"	"	"
18.	4255,10	(7)	(0)	1,133						
19.	4269,47	(7)	(0)	1,200	(0)	6:5				
20.	4289,58	(7)	(0)	1,065						
21.	4291,40	(7)	(0)	1,171	(0)	7:6				
22.	4296,34	(7)	(0)	1,051	(0)	21:20				
23.	4326,29	(2)	(0)	(0,343)	(0,686)	0	0,343	0,686	1,029	1,372
24.	4341,58	(7)	(0)	0,797	(0)	4:5				
25.	4381,85	(?)	(0,372)	(0,651)	(0,929)	(1,207)	1,485	1,763	2,041	2,319
Intensitäten der $\pi$ -Komp. alle gleich. Typus außerordentlich unsymmetrisch										
26.	4391,70	(1)	(0)	(2,06)	1,03	3,09	5,15			
27.	4411,86	wie	4381,85							
28.	4472,20	(7)	(0)	0,996						
29.	4485,15	(2)	(0)	(0,478)	(0,957)	(1,435)	0	0,478	0,957	1,435
								1,914	2,392	

Die weiteren Angaben von Catalán und Kiess entziehen sich wegen der geringen Intensität der Linien der Kontrolle durch den Zeemaneffekt.

## II. Das Funkenspektrum

Für die Entscheidung, ob eine Linie zum Bogen- oder Funkenspektrum zu rechnen ist, geben die Intensitätsvermerke in den Wellenlängentabellen einen ersten Anhalt. Im Zeemaneffekt ist dann der Unterschied unmittelbar anschaulich abzulesen. Denn die Aufspaltungen zerfallen in die beiden großen Klassen der geradzahigen und ungeradzahigen Multiplizitäten.

Zwischen 2500 und 3000 ÅE. liegen mehrere auffällige starke Linienanhäufungen des Molybdänfunkenspektrums. Durch die Beobachtung der magnetischen Zerlegungen ließen sich die zusammengehörigen Linien leicht erfassen und in Multipletts ordnen. Die Schemata 5—7 stellen die Struktur der Gruppen dar. Das erste ( $DF$ )-Multiplett enthält die stärksten Linien des ganzen Spektrums in dem mit normalen Mitteln zugänglichen Gebiet. Auch das Stück der  $PD$ -Gruppe, das wir angeben können, hat eine helle Linie (Intensitätsangabe 10) aufzuweisen. Wir vermuten deshalb, daß der  $^4D$ -Term der Grundzustand des  $\text{Mo}^+$  ist, in Analogie zum  $\text{Cr}^+$ , zumal ja auch im übrigen Cr fast den gleichen spektralen Charakter besitzt wie Mo. Alle Terme der drei Gruppen sind in Sextetterme.

Die Intervallproportionen sind:

Für den $^4D$ -Term:	9.0 : 7.7 : 6.1 : 4.0	beobachtet
	9.0 : 7.0 : 5.0 : 3.0	berechnet
Für den $^4F$ -Term:	11.0 : 8.8 : 7.1 : 5.3 : 3.4	beobachtet
	11.0 : 9.0 : 7.0 : 5.0 : 3.0	berechnet
Für den $^4D$ -Term:	9.0 : 7.8 : 6.6 : 4.1	beobachtet
	9.0 : 7.0 : 5.0 : 3.0	berechnet

$^4D$  ist regelrecht,  $^4\bar{D}$  und  $^4F$  sind verkehrte Terme.

In der Gruppe  $DD$  ist die geringe, teilweise sogar verschwindende Intensität der Diagonalglieder anomal. Trotzdem wird man auf Grund der Zeemaneffekte der übrigen Glieder das Liniengebilde als reelles Multiplett betrachten dürfen.



Schema 5-7

 $D_1 \Delta\nu 250,9$   $D_2 \Delta\nu 383,3$   $D_3 \Delta\nu 483,1$   $D_4 \Delta\nu 560,3$   $D_5$ 

	(5)	(3)			
$F_1$	34068462	33817589			
$\Delta\nu 295,2$	2934,41	2956,18			
	(8)	(10)	(4)		
$F_2$	34363671	34112751	33729278		
$\Delta\nu 466,1$	2909,20	2930,60	2963,92		
		(10)	(12)	(3)	
$F_3$		34578798	34195594	33712445	
$\Delta\nu 617,9$		2891,10	2923,50	2965,40	
			(10)	(10)	(2)
$F_4$			34813478	34330396	33770067
$\Delta\nu 767,9$			2871,61	2912,02	2960,34
				(12)	(5)
$F_5$				35098370	33537944
$\Delta\nu 960,21$				2848,30	2894,52
					(20)
$F_6$					35498160
					2896,22

 $\Delta\nu 250,9$   $\Delta\nu 382,6$   $\Delta\nu 483,0$   $\Delta\nu 559,1$ 

	(3)	(7)			
$\bar{D}_1$	38165303	37914333			
$\Delta\nu 241,6$	2619,40	2636,74			
	(5)	(2)	(8)		
$\bar{D}_2$	38406925	38155955	37773430		
$\Delta\nu 385,6$	2602,92	2620,04	2646,57		
		(4)	(0)	(7)	
$\bar{D}_3$		38541661	38159061	37676014	
$\Delta\nu 456,1$		2593,82	2619,83 <sup>1)</sup>	2653,42	
			(3)	(0)	(10)
$\bar{D}_4$			38615200	38132153	37573072
$\Delta\nu 525,9$			2588,88	2621,61 <sup>1)</sup>	2660,69
				(6)	(0)
$\bar{D}_5$				38658053	38098953
				2586,01	2623,91 <sup>1)</sup>

1) berechnet.

 $\Delta\nu 250,85$   $\Delta\nu 382,95$ 

	(8)	(10)	(3)		
$P_2$	37256494	37005649	36622695		
	2683,30	2701,49	2729,71		
$P_3$		—	—	—	
$P_4$			—	—	—

## Die Zeemaneffekte zu Schema 5—7

Die Linien 1, 2, 3, 15, 17, 22, 23, 24 haben außerordentlich enge Zerlegungen, die nicht mehr getrennt werden können. In solchen Fällen ist es noch möglich, einen ausgezeichneten (auch gegen beginnenden Paschen-Backeffekt invarianten) Abstand zu messen. Es ist das die Entfernung der stärksten  $\sigma$ -Komponenten, und man bezeichnet sie nach dem Vorgange von Back<sup>1)</sup> mit  $2f$  (feste Entf.). Infolge erheblicher Überbelichtung ist bei den Linien auch die Genauigkeit etwas beeinträchtigt. Bei den Linien 5 und 7 ist die Spannweite des ganzen Typus angegeben.

1. 2896,22  
beobachtet:  $2f$  1,96  
berechnet:  $2f$  2,00  
Deutung: (5) (15) (25) (35) (45) 99 109 119 129 139 : 99  
Termkombination:  $D_0 F_4$
2. 2848,30  
beobachtet:  $2f$  1,70  
berechnet:  $2f$  1,798  
Deutung: (53) (159) (265) (371) 623 729 835 941 — : 693  
Termkombination:  $D_4 F_5$
3. 2871,61  
beobachtet:  $2f$  1,54  
berechnet:  $2f$  1,49  
Deutung: (41) (123) (185) 235 317 399 481 563 645 : 315  
Termkombination:  $D_3 F_4$
4. 2891,10  
beobachtet: (0,275) (0,825) 0,483 1,033 1,583 2,132  
berechnet: (0,276) (0,829) 0,486 1,038 1,590 2,143  
(29) (87) 51 109 167 225 : 105  
Termkombination:  $D_2 F_3$
5. 2894,52  
beobachtet: Spannweite 3,96  
berechnet: " 4,2  
Deutung: (6) (18) (30) (42) (54) 100 112 124 135 148 160 — : 99  
Termkombination:  $D_5 F_5$
6. 2909,20  
beobachtet: (1,133) 0,000 2,200  
berechnet: (1,133) -0,066 2,200  
(17) -1 33 : 15  
Termkombination:  $D_1 F_3$
7. 2912,02  
beobachtet: Spannweite 4,17  
berechnet: " 4,127  
Deutung: (6) (18) (30) (42) 58 70 82 94 106 118 130 : 63  
Termkombination:  $D_4 F_4$

1) Ztschr. f. Phys. 15. S. 206. 1923.

8. 2923,50  
 beobachtet: (— — — —) 0,903 1,147 **1,490** 1,835 2,179  
 berechnet: (— — — —) 0,800 1,143 **1,486** 1,828 2,171  
 nur die  $\sigma$ -Komponenten getrennt  
 Deutung: (6) (18) (30) 28 40 **52** 64 76 : 35  
 Termkombination:  $D_2 F_3$
9. 2930,60  
 beobachtet: (0,393) (1,196) 0,664 **1,461** 2,258  
 berechnet: (0,400) (1,200) 0,667 **1,468** 2,267  
 (6) (18) 10 **22** 34 : 15  
 Termkombination:  $D_3 F_2$
10. 2934,41  
 beobachtet: (2,000) 1,333  
 berechnet: (2,000) 1,333  
 (6) 4 : 3  
 Termkombination:  $D_1 F_1$
11. 2956,18  
 beobachtet: überlagert von 2955,93
12. 2960,34 zu schwach
13. 2963,92  
 beobachtet: (0,296) (0,890) 0,775 1,368 1,962 **2,551**  
 berechnet: (0,295) (0,886) 0,771 1,362 1,954 **2,543**  
 (81) (93) 81 143 205 **267** : 105  
 Termkombination:  $D_3 F_2$
14. 2965,40  
 beobachtet: (0,136) (0,410) (0,683) — — — — **2,270**  
 berechnet: (0,136) (0,410) (0,683) 0,905 1,178 1,451 1,724 1,997 **2,270**  
 (43) (129) (215) 285 371 457 543 629 715 : 315  
 die inneren  $\sigma$ -Komponenten sind zu schwach.  
 Termkombination:  $D_4 F_3$
15. 2586,01  
 beobachtet: 2 f 2,6  
 berechnet: 2 f 2,88  
 Deutung: (1) (3) (5) (7) **91** 93 95 97 99 101 103 : 63  
 Termkombination:  $D_4 D_3$
16. 2588,88  
 beobachtet: zu schwach
17. 2593,82  
 beobachtet: 2 f 2,64  
 berechnet: 2 f 2,68  
 Deutung: (11) (33) **141** 163 185 207 : 105  
 Termkombination:  $D_2 D_3$
18. 2602,92  
 beobachtet: (0,737) **1,139** 2,612  
 berechnet: (0,733) **1,133** 2,600  
 (11) 17 39 : 15  
 Termkombination:  $D_1 D_3$
19. 2619,40  
 beobachtet: (0) (0,333)  
 berechnet: (0) 0,333  
 (0) 10 : 3  
 Termkombination:  $D_1 D_1$

20. 2620,04  
beobachtet: zu schwach
21. 2636,74  
beobachtet: (0,784) 1,135 2,604  
berechnet: (0,733) 1,133 2,600  
(11) 17 39 : 15  
Termkombination:  $D_2 \bar{D}_1$
22. 2646,57  
beobachtet: 2f 2,72  
berechnet: 2f 2,68  
Deutung: (11) (33) 141 163 185 207 : 105  
Termkombination:  $D_2 \bar{D}_1$
23. 2653,47  
beobachtet: 2f 2,86  
berechnet: 2f 2,825  
Deutung: (11) (33) (55) 445 489 511 533 555 : 315  
Termkombination:  $D_2 \bar{D}_1$
24. 2660,69  
beobachtet: 2f 2,85  
berechnet: 2f 2,88  
Deutung: (1) (3) (5) (7) 91 93 95 97 99 101 103 105 : 63  
Termkombination:  $D_2 \bar{D}_1$
25. 2683,30  
beobachtet: (0,468) 1,938 2,873  
berechnet: (0,467) 1,933 2,867  
(7) 29 43 : 15  
Termkombination:  $P_2 D_1$
26. 2701,49  
beobachtet: (0,267) (0,799) 1,698 2,131 2,664  
berechnet: (0,267) (0,800) 1,600 2,133 2,667  
(4) (12) 24 32 40 : 15  
Termkombination:  $P_2 D_2$
27. 2729,71  
beobachtet: (0,369) (1,108) 0,539 1,277 2,014 2,751  
berechnet: (0,371) (1,115) 0,543 1,286 2,028 2,771  
(13) (39) 19 45 71 97 : 35  
Termkombination:  $P_2 D_3$

Oberhalb 3000 Å-E. folgt zunächst ein Gebiet mit nur vereinzelt starken Funkenlinien. Erst zwischen 3700 und 4000 Å-E. mehren sich wieder die intensiven. Einige davon konnten als Kombination von Quartettermen gedeutet werden (Schema 8 und 9).

## Schema 8 und 9

	$D_1$ $\Delta\nu$ 287,10	$D_2$	$D_3$	$D_4$
$P_1$	(10)	(8)		
$\Delta\nu$ 814,0	22835 503	22548 216		
	4377,92	4433,70		
$P_2$	(2)	(10)		
	23649 516	23362 303	—	
$P_3$	4227,23	4279,20	—	—

	$D_1$ $\Delta\nu$ 287,04	$D_2$	$D_3$	$D_4$
$F_2$	(8)	(6)		
	26999 664	26712 615	—	
	3702,72	3742,49		
$F_3$		—	—	—
$F_4$			—	—
$F_5$				—

## Die Zeemaneffekte zu Schema 12 und 13

- 3702,72  
beobachtet: (0,204) 0,204 **0,612**  
berechnet: (0,200) 0,200 **0,600**  
(1) 1 3 : 5  
Termkombination:  $D_1 F_2$
- 3742,49  
beobachtet: (0,396) (1,888) 0 **0,792** 1,584  
berechnet: (0,400) (1,200) 0 **0,800** 1,600  
(2) (6) 0 4 8 : 5  
Termkombination:  $D_2 F_3$
- 4227,23  
beobachtet: (0,885) 0,885 **2,655**  
berechnet: (0,866) 0,866 **2,600**  
(13) 13 39 : 15  
Termkombination:  $P_2 D_1$
- 4279,20  
beobachtet: (0,270) (0,806) 0,942 1,480 2,022  
berechnet: (0,267) (0,799) 0,933 1,465 2,000  
(4) (12) 14 22 30 : 15  
Termkombination:  $P_3 D_2$
- 4377,92  
beobachtet: (2,672) 2,672  
berechnet: (2,666) 2,666  
(4) 4 : 3  
Termkombination:  $P_1 D_1$
- 4433,70  
beobachtet: (0,730) **0,464** 1,929  
berechnet: (0,733) **0,466** 1,933  
(11) 7 29 : 15  
Termkombination:  $P_1 D_1$

In der  $PD$ -Gruppe fehlen mit großer Wahrscheinlichkeit die Kombinationen  $P_1 D_3$ ,  $P_3 D_3$ ,  $P_3 D_4$  tatsächlich. Das sind nämlich gerade die Übergänge, die mit beträchtlicher Intensität und z. T. recht breiter Aufspaltung zu erwarten sind und darum der Beobachtung kaum entgangen wären. Alle im Handbuch der Spektroskopie<sup>1)</sup> angeführten Linien mit Intensitätsangaben von (3) und mehr wurden im Zeemaneffekt untersucht. Keine von ihnen zeigt indessen eine der gesuchten Zerlegungen. Die gedeuteten Linien der Gruppe haben Aufspaltungen, die mindestens befriedigend der Landéschen „g-Formel“ folgen. Es ist deshalb wenig plausibel, anzunehmen, daß die vermißten sich anders verhielten. Trotzdem wurden der Sicherheit halber ohne Rücksicht auf den Zeemaneffekt sämtliche  $\Delta\nu$  zwischen  $\lambda 4279.20$  ( $P_1 D_2$ ) und ihrer Umgebung einerseits, zwischen  $\lambda 3742.41$  ( $D_2 F_2$ ) und ihrer Umgebung andererseits aufgesucht, und zwar weit über die Grenzen hinaus, die die Intervallregel zieht. Auch die Möglichkeit des Auftretens von partiell verkehrten Termen<sup>2)</sup> wurde nicht außer acht gelassen. Es konnten aber keine gleichen Differenzen gefunden werden. Ein ähnlicher Fall ist von Meggers<sup>3)</sup> in einer Arbeit über das Vanadiumfunkenspektrum beschrieben worden.

In der  $DF$ -Gruppe liegen die Dinge ebenso.

Für eine größere Zahl von Linien gelang keine Termanalyse aus den Zeemanaufspaltungen. Sie sind in Tab. 10 zusammengestellt. Die Ziffern in Klammern hinter den Wellenlängen bedeuten wieder die Grundtypen.

Tabelle 10

1. 3254,83 (6) beob.	(1,133) 1,133
2. 3287,35 (4) „	(0,696) 2,087
3. 3346,35 (7) „	(0) 1,462
4. 3528,04 (7) „	(0) 1,096
5. 3591,84 (7) „	(0) 0,618
6. 3651,30 (5) „	(0,108) (0,325) (0,541) — — — 1,793
Die inneren $\sigma$ -Komponenten sind zu schwach.	
7. 3652,61 (7) „	(0) 1,171 (0) 116:99

1) Kayser-Konen, Handbuch d. Spektroskopie, Bd. VI.

2) O. Laporte, Ztschr. f. Phys. 23. S. 151. 1924.

3) Ztschr. f. Phys. 33. S. 509. 1925.

Tabelle 10 (Fortsetzung)

8. 3658,41 (7)	beob.	(0) 1,227	(0) 78 : 63						
9. 3670,87 (5)	"	(0,150)	0,150	0,300					
10. 3688,49 (4)	"	(0) 1,263	Pseudotriplett						
11. 3692,82 (4)	"	2f 1,58	Pseudotriplett mit sehr breiten Komponenten						
12. 3744,55 (7)	"	(0) 0,986	(0) 62 : 63						
13. 3755,63 (6)	"	(0,108)	(0,323)	(0,538)	0,753	0,968	1,183	1,398	1,613
14. 3786,52 (4)?	"	(0,495)	1,155						
15. 3961,61 (4)	"	(0,099)	(0,297)	(0,495)	0,829	—	—	—	—
16. 4119,78 (4)	"	(0,169)	(0,506)	(0,843)	0,506	0,843	1,180	—	
17. 4122,52 (4)	"	(0)	0,716	Pseudotriplett mit sehr breiten Komponenten					
18. 4125,80 (7)	"	(0)	1,159						
19. 4147,02 (4)	"	(0,20)	0,93	1,33					
20. 4250,85 (4)	"	(0,171)	(0,514)	(0,856)	0,514	0,856	1,199	1,541	1,883
21. 4328,19 (5)	"	(0,135)	(0,406)	0,677	0,948	1,219	1,390		
22. 4363,10 (4)	"	(0,283)	(0,749)	0,433	0,999	1,565	2,131		

Zusammenfassend können wir feststellen:

1. Daß das Verhältnis von Funken- zu Bogenspektrum bei *Mo* dem Verzweigungsprinzip entspricht. Wir fanden im  $\text{Mo}^+$  ein Quartett- und ein Sextettsystem, während *Mo* Septetts und Quintetts besitzt. Das noch erwartete Triplettsystem ist wohl durch die geringe Intensität seiner Linien bisher nicht entdeckt worden.

2. Daß auch die auftretenden *l*-Zahlen den Heisenberg-Hundschen Forderungen konform sind. Der  $^6D$ -Term kann zu folgenden Termen des *Mo* Anlaß geben:  $^7P^7D^7F$ ,  $^5P^5D^5F$ ,  $^7S^7P^7D^7F^7G$ ,  $^6S^5P^5D^5F^5G$ . Bekannt waren durch Catalán und Kiess 1  $^7P$ -Term, 1  $^7S$ -Term, 1  $^5S$ -Term, 3  $^5P$ -Terme, 3  $^5D$ -Terme, 1  $^5F$ -Term. Wir fügen hinzu 1  $^7D$ -Term und 1  $^7F$ -Term (3363,98 Å.-E.  $^7D_2$   $^7F_3$ ), ferner 1  $^5F$ -Term (Schema 1).

Hrn. Prof. Dr. H. Konen, der auch die Anregung zu der Untersuchung gab, bin ich für sein großes Interesse und die rege Förderung der Arbeit zu herzlichem Dank verpflichtet. Es wurden zum Teil Apparate benutzt, die aus Mitteln der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft herkommen und für die auch an dieser Stelle gedankt sei.

**Erklärungen zu den Vergrößerungen und Intensitätskurven**

Die Bilder 1 und 2 sind etwa 4fach, 3 und 4 7fach vergrößert.

1	5505,54	Termkombination $^5S_3\ ^5P_3$	Typus (0) (1) (2) 3 4 5 6 7:3
2	5570,57	Termkombination $^5S_1\ ^5P_1$	Typus (0) (1) 3 4 5:2
3a	4291,40		Typus (0) 7:6
3b	4292,37	Termkombination $^5D_1\ ^5F_3$	Typus (0) (1) 1 2 3:5
3c	4293,42	Termkombination $^5D_3\ ^5F_3$	Typus (0) (1) (2) 3 4 5 6 7:4
3d	4294,03	Termkombination $^5D_5\ ^5F_1$	Typus (0) 0

Die Bilder 3b, 3c, 3d sind in doppelter Hinsicht lehrreich. Erstens bringt 4294,03 den Fall einer magnetisch nicht zerlegten Kombination. Zweitens zeigen die Linien 4292,37, 4293,42 und 4294,03, trotzdem sie so eng benachbart sind, keinen merklichen Paschen-Backeffekt. Das liegt eben daran, daß nicht die Wellenlängen- sondern die Wellenzahldifferenzen maßgebend sind, die in unserem Multiplett  $176\text{ cm}^{-1}$  und mehr betragen.

4a	4576,67	Termkombination $^5P_3\ ^5D_3$	Typus (2) (4) 7 9 11 13:6
4b	4595,32	Termkombination $^5P_1\ ^5D_1$	Typus (2) 3 5:2

Die Kurven 5, 6, 7 sind mit dem Mikrophotometer des Instituts aufgenommen.

7 entspricht Bild 1

6	3903,11	Termkombination $^1S_0\ ^1P_2$	Typus (0) (1) (2) 4 5 6 7 8:3
---	---------	--------------------------------	-------------------------------

5a, b, c entsprechen 3b, c, d

In den Kurven ist noch das Schwärzungsgesetz der photographischen Platte enthalten. Immerhin sind aber die Intensitätsverhältnisse wenigstens qualitativ zu verfolgen. Man vergleiche z. B. die Bilder 5 und 7. In den zugehörigen Typen folgen beide Male je 15 Komponenten in gleichen Abständen aufeinander. Die Intensitätsabstufungen sind dagegen in den beiden Fällen ganz verschieden.

(Eingegangen 20. April 1926)



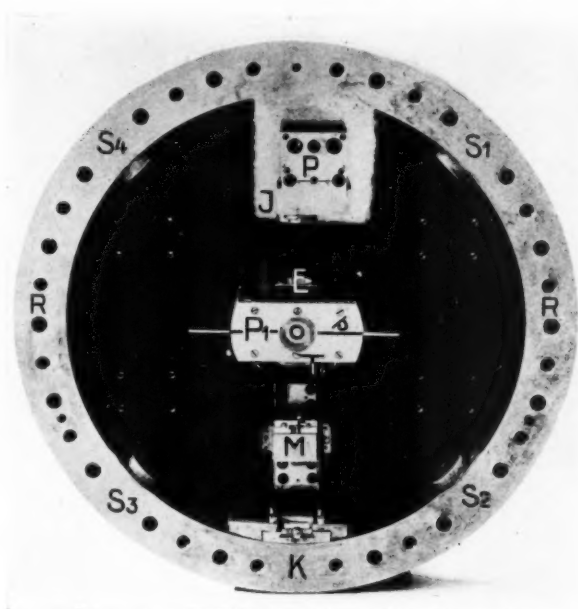


Fig. 4

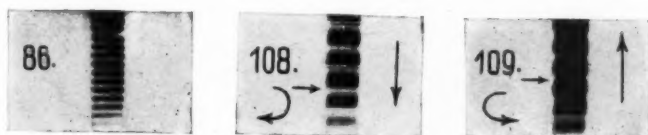


Fig. 6

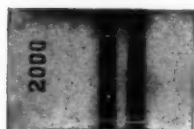


Fig. 7

B. Pogány

1891  
1892  
1893  
1894  
1895  
1896  
1897  
1898  
1899  
1900

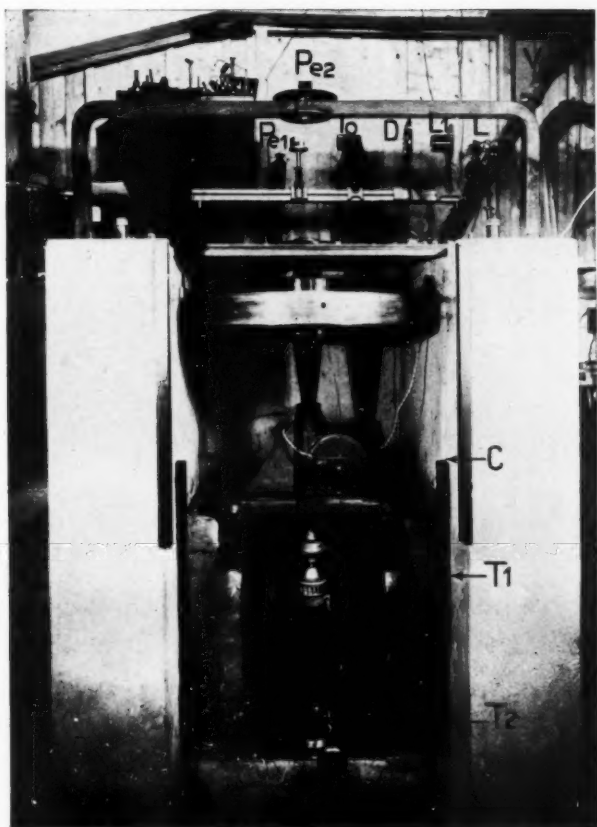


Fig. 5

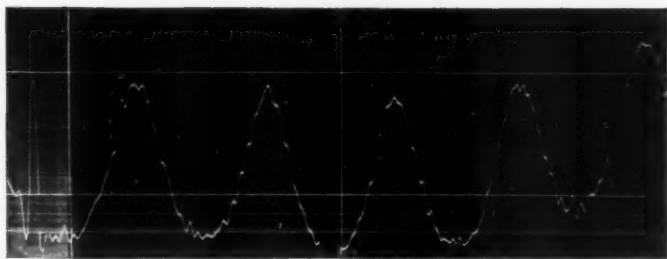
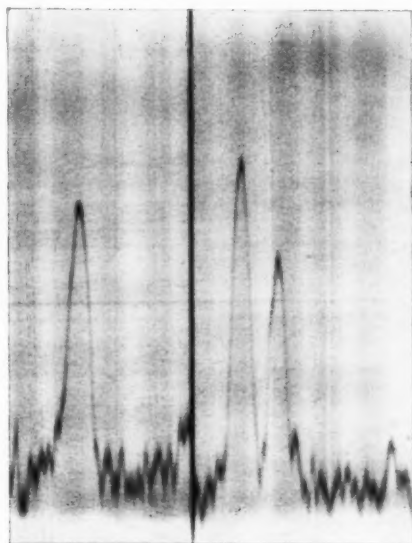


Fig. 8

B. Pogány

1871  
1872  
1873  
1874



*L*-Linie

*K*-Doublet

Fig. 1

J. Schrör

1884  
1885  
1886  
1887  
1888  
1889  
1890  
1891  
1892  
1893  
1894  
1895  
1896  
1897  
1898  
1899  
1900

Tafel mit Vergrößerungen und Photometerkurven



Fig. 1



Fig. 2

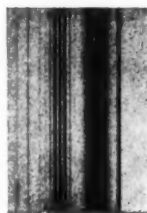


Fig. 3a, b, c, d

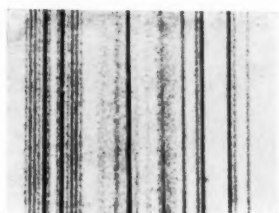


Fig. 4a, b

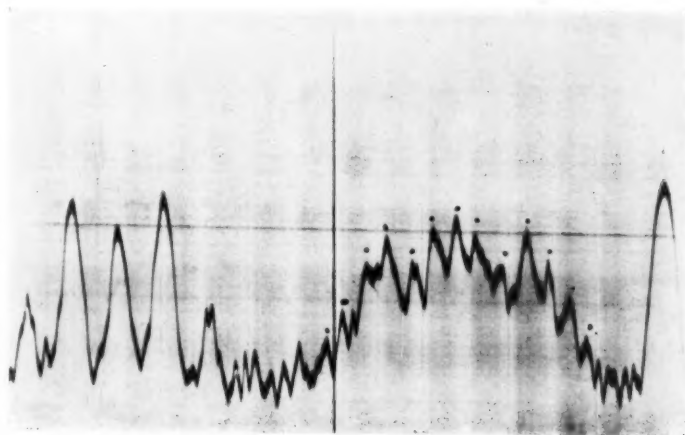


Fig. 5a, b, c

100



